LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

5 kwietnia 2006 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k, dla których liczba $3^k + 5^k$ jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku naturalnym większym od 1.

3. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.

LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

6 kwietnia 2006 r. (drugi dzień zawodów)

4. Na trójce liczb wykonujemy następującą operację. Wybieramy dwie spośród tych liczb i zastępujemy je ich sumą oraz ich iloczynem, pozostała liczba nie ulega zmianie. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od trójki $(3,4,5)$ i wykonując tę operację możemy ponownie uzyskać trójkę liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

5. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB=CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

6. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2+ax+b)\cdot P(x)$ jest wielomianem postaci

$$x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0\,,$$

gdzie każda z liczb $c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.