LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2005 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie trójki (x,y,n) liczb całkowitych dodatnich spełniające równanie

$$(x-y)^n = xy\,.$$

2. Punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na okręgu o. Punkt S leży wewnątrz okręgu o i spełnia warunki

$$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC\,.$$

Prosta zawierająca dwusieczną kąta ASB przecina okrąg o w punktach P i Q. Dowieść, że $PS = QS$.

3. W kwadratowej tablicy o wymiarach $2n \times 2n$, gdzie n jest liczbą naturalną, znajduje się $4n^2$ liczb rzeczywistych o sumie równej 0 (na każdym polu tablicy jedna liczba). Wartość bezwzględna każdej z tych liczb jest nie większa od 1. Dowieść, że wartość bezwzględna sumy wszystkich liczb z pewnego rzędu (poziomego lub pionowego) nie przekracza n.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.

LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2005 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba rzeczywista $c > -2$. Dowieść, że jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ są dodatnie oraz

$$\sqrt{x_1^2 + cx_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 + cx_2x_3 + x_3^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2 + cx_nx_1 + x_1^2} = \\ = \sqrt{c+2}\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,,$$

to $c = 2$ lub $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

5. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech $m = 4k^2 - 5$. Wykazać, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, że każdy wyraz ciągu (x_n) określonego wzorami

$$x_1 = a\,,\ x_2 = b\,, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1$$

jest względnie pierwszy z liczbą m.

6. Udowodnić, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 zawiera sześciokąt wypukły o polu nie mniejszym niż 3/4.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.