LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(11 września 2004 r. – 10 grudnia 2004 r.)

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 = yz+1 \\ y^2 = zx+2 \\ z^2 = xy+4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Pierwsze równanie danego układu równań mnożymy przez y, drugie przez z, a trzecie przez x. W ten sposób uzyskane równania dodajemy stronami otrzymując

$$0 = y+2z+4x\,. \tag{1}$$

Następnie mnożymy pierwsze równanie danego w treści zadania układu równań przez z, drugie przez x, a trzecie przez y. Po dodaniu stronami dostajemy

$$0 = z+2x+4y\,. \tag{2}$$

Równanie (2) mnożymy przez -2 i dodajemy stronami do równania (1). W efekcie otrzymujemy $0=-7y$, czyli $y=0$.

Wstawiając $y=0$ do pierwszego równania uzyskujemy $x^2=1$, skąd $x=1$ lub $x=-1$. Wykorzystując po raz kolejny zależność (2) mamy $z=-2x$, czyli odpowiednio $z=-2$ lub $z=2$.

Wykazaliśmy zatem, że jeśli trójka (x,y,z) spełnia podany układ równań, to jest nią $(1,0,-2)$ lub $(-1,0,2)$. Z drugiej strony, bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że obie uzyskane trójki (x,y,z) są rozwiązaniami danego układu równań.

Odp.: $(x,y,z)=(1,0,-2)$ lub $(x,y,z)=(-1,0,2)$.

Zadanie **2.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n>1$, dla których wartość sumy $2^2+3^2+\ldots+n^2$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym.

Rozwiązanie

Ze wzoru $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, prawdziwego dla dowolnej liczby naturalnej n, otrzymujemy

$$2^2+3^2+\ldots+n^2=\tfrac{1}{6}(n(n+1)(2n+1)-6)=\tfrac{1}{6}(n-1)(2n^2+5n+6)\,.$$

Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia wszystkich liczb naturalnych $n>1$, liczb pierwszych p oraz liczb całkowitych dodatnich k, dla których spełniona jest równość

$$(n-1)(2n^2+5n+6)=6p^k\,. \tag{1}$$

Ponieważ czynnik $2n^2+5n+6$ jest większy od 6, więc z równości (1) wynika, że jest on podzielny przez p. Wykażemy, że z kolei czynnik $n-1$ nie jest podzielny przez p.

Przypuśćmy, że $p\,|\,n-1$. Ponieważ także liczba

$$M = 2n^2+5n+6 = 2(n-1)^2+9(n-1)+13 \qquad (2)$$

jest podzielna przez p, więc p jest dzielnikiem pierwszym liczby 13. Zatem $p=13$. Stąd $n-1 \geqslant 13$, co pociąga nierówność $M \geqslant 36\cdot 13$. Z równości (1) wnioskujemy, że M jest dzielnikiem liczby $6\cdot 13^k$, a skoro $M > 6\cdot 13$, to musi zachodzić podzielność $13^2\,|\,M$. Z zależności (2) uzyskujemy zatem, że liczba $9(n-1)+13$ jest podzielna przez 13^2, a więc

(3) liczba $9\cdot\frac{1}{13}(n-1)+1$ dzieli się przez 13.

Liczba $\frac{1}{13}(n-1)$ jest — na mocy równości (1) — dzielnikiem liczby $6\cdot 13^{k-1}$ i jednocześnie nie jest — na mocy podzielności (3) — podzielna przez 13. Stąd wynika, że liczba $\frac{1}{13}(n-1)$ jest równa 1, 2, 3 lub 6. Jednak w żadnym z tych czterech przypadków nie jest spełniona podzielność (3). Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że czynnik $n-1$ nie jest podzielny przez p.

Z równości (1) wnioskujemy zatem, że czynnik $n-1$ musi być jedną z liczb: 1, 2, 3 lub 6. Stąd liczba n jest równa 2, 3, 4 lub 7. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że istotnie każda z tych liczb spełnia warunki zadania:

$$2^2=2^2\,,\ 2^2+3^2=13^1\,,\ 2^2+3^2+4^2=29^1\,,\ 2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=139^1\,.$$

Odp.: Liczba n jest równa 2, 3, 4 lub 7.

Zadanie **3.** W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC. Punkt F leży na odcinku DE, przy czym

$$\frac{EF}{FD} = \frac{AD}{DB}\,.$$

Wykazać, że proste CF i AE są prostopadłe.

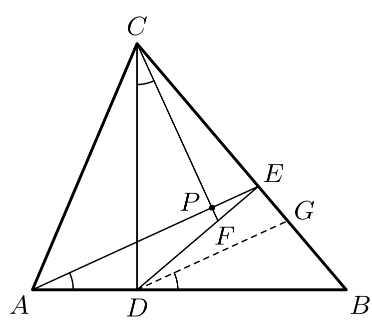
Rozwiązanie

Przez punkt D poprowadźmy prostą równoległą do prostej AE, która przecina bok BC w punkcie G (rys. 1). Na mocy twierdzenia Talesa uzyskujemy proporcje

$$\frac{EF}{FD} = \frac{AD}{DB} = \frac{EG}{GB}\,,$$

skąd wynika, że proste FG i DB są równoległe. Stąd oraz z podobieństwa trójkątów prostokątnych CDE i DBE otrzymujemy równości

$$\frac{FD}{GB} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{DB}\,.$$



rys. 1

Powyższa zależność wraz z równością $\sphericalangle CDF = \sphericalangle DBG$ dowodzi, że trójkąty CDF i DBG są podobne. Zatem $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BDG = \sphericalangle DCF$. Jeśli przez P oznaczymy punkt przecięcia prostych CF i AE, to z ostatniej zależności wynika, że punkty A, D, C, P leżą na jednym okręgu. Ostatecznie mamy $\sphericalangle APC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$.

Zadanie **4.** Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz dodatnie liczby rzeczywiste a, b. Wyznaczyć największą możliwą wartość sumy

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

gdy $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ są liczbami z przedziału $\langle 0;1\rangle$, spełniającymi warunki

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant a, \qquad y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leqslant b.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ spełniających warunki zadania zachodzą nierówności

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leqslant n, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant a, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant b.$$

Zatem

$$(2) \qquad x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leqslant \min(a,b,n).$$

Wykażemy najpierw, że jeśli $a, b \geqslant n$ lub $[a] \neq [b]$ (symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x), to liczba $\min(a,b,n)$ jest największą wartością rozpatrywanej sumy.

Jeżeli bowiem $a, b \geqslant n$, to przyjmujemy $x_i = y_i = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas nierówności (1) są spełnione, a rozpatrywana suma przyjmuje wartość $n = \min(a,b,n)$, która — na mocy mocy nierówności (2) — jest jej wartością największą.

W przypadku gdy $A = [a] \neq [b] = B$, przyjmijmy bez straty ogólności, że $A < B$. Aby nie rozpatrywać ponownie przypadku $a, b \geqslant n$, możemy również założyć, że $A < n$. Przyjmijmy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_A = 1, \quad x_{A+1} = a - A, \quad x_i = 0 \quad \text{dla} \quad i > A+1;$$
$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{A+1} = 1, \quad y_i = 0 \quad \text{dla} \quad i > A+1.$$

Tak wybrane liczby x_i, y_i należą do przedziału $\langle 0;1\rangle$, nierówności (1) są dla nich spełnione, a rozpatrywane wyrażenie przyjmuje wartość $a = \min(a,b,n)$, która — na mocy uzyskanej nierówności (2) — jest wartością największą rozpatrywanej sumy.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek $A = B < n$. Wykażemy, że wówczas największą wartością rozpatrywanej sumy jest liczba $A + (a-A)(b-A)$, którą można uzyskać przyjmując

$$x_1=x_2=\ldots=x_A=1, \quad x_{A+1}=a-A, \quad x_i=0 \quad \text{dla} \quad i>A+1;$$
$$y_1=y_2=\ldots=y_A=1, \quad y_{A+1}=b-A, \quad y_i=0 \quad \text{dla} \quad i>A+1.$$

Pozostało zatem wykazać, że

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \leqslant A+(a-A)(b-A). \tag{3}$$

Jeśli $x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant A$, to

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \leqslant A \leqslant A+(a-A)(b-A).$$

Analogicznie dowodzimy nierówności (3) jeśli $y_1+y_2+\ldots+y_n \leqslant A$. Przyjmijmy więc w dalszej części rozumowania, że

$$A<x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant a \quad \text{oraz} \quad A<y_1+y_2+\ldots+y_n \leqslant b.$$

Przypuśćmy, że pewne dwie liczby x_k, x_l należą do przedziału $(0;1)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $y_k \leqslant y_l$. Zdefiniujmy $\delta=\min(x_k,1-x_l)$ oraz zmodyfikujmy ciąg $x_1,x_2,\ldots,x_n$ przyjmując

$$x'_k=x_k-\delta, \quad x'_l=x_l+\delta, \quad x'_i=x_i \quad \text{dla} \quad i\neq k,l.$$

Wówczas $x'_k=0$ lub $x'_l=1$, liczby $x'_1,x'_2,\ldots,x'_n$ należą do przedziału $\langle 0;1\rangle$, $x'_1+x'_2+\ldots+x'_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$ oraz

$$\sum_{i=1}^{n} x'_iy_i-\sum_{i=1}^{n} x_iy_i=(x_k-\delta)y_k+(x_l+\delta)y_l-x_ky_k-x_ly_l=\delta(y_l-y_k)\geqslant 0.$$

Wykazaliśmy zatem, że zmodyfikowany ciąg $x'_1,x'_2,\ldots,x'_n$ zawiera *mniej* wyrazów różnych od 0 lub 1 niż wyjściowy ciąg $x_1,x_2,\ldots,x_n$, a przy tym wartość rozpatrywanej sumy nie zmalała. Jeśli uzyskany ciąg $x'_1,x'_2,\ldots,x'_n$ zawiera co najmniej dwa wyrazy różne od 0 lub 1, to modyfikujemy go ponownie zgodnie z opisaną wyżej procedurą. Po co najwyżej $n-1$ krokach uzyskujemy ciąg $a_1,a_2,\ldots,a_n$, który zawiera nie więcej niż jeden wyraz różny od 0 lub 1, a przy tym zachodzi nierówność

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \leqslant a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_ny_n.$$

Następnie, ustalając liczby $a_1,a_2,\ldots,a_n$, przeprowadzamy analogiczną modyfikację ciągu $y_1,y_2,\ldots,y_n$. W efekcie otrzymujemy ciąg $b_1,b_2,\ldots,b_n$, który zawiera nie więcej niż jeden wyraz różny od 0 lub 1, a ponadto

$$a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_ny_n \leqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

W każdym kroku suma modyfikowanych liczb nie ulega zmianie, więc

$$A<a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant a \quad \text{oraz} \quad A<b_1+b_2+\ldots+b_n \leqslant b. \tag{4}$$

Niech $a'_1,a'_2,\ldots,a'_n$ będzie taką permutacją ciągu $a_1,a_2,\ldots,a_n$, że ciągi $a'_1,a'_2,\ldots,a'_n$ oraz $b_1,b_2,\ldots,b_n$ są *jednakowo uporządkowane*, tzn.

$$(a'_i-a'_j)(b_i-b_j)\geqslant 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

Wówczas zachodzi nierówność

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leqslant a_1'b_1+a_2'b_2+\ldots+a_n'b_n\,.$$

(zob. *Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej*, Zwardoń 2003, Dodatek C, str. 38*). Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że $a_1' \geqslant a_2' \geqslant \ldots \geqslant a_n'$ oraz $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Z nierówności (4) wynika więc, że

$$a_i' = b_i = 1 \quad \text{dla} \;\; i < A+1 \quad \text{oraz} \quad a_i' = b_i = 0 \quad \text{dla} \;\; i > A+1\,,$$

a pondato $a_p \leqslant a-A$ oraz $b_p \leqslant b-A$ dla $p=A+1$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i'b_i = A + a_pb_p \leqslant A+(a-A)(b-A)\,,$$

co kończy dowód nierówności (3).

Reasumując: Największa wartość rozpatrywanego wyrażenia wynosi

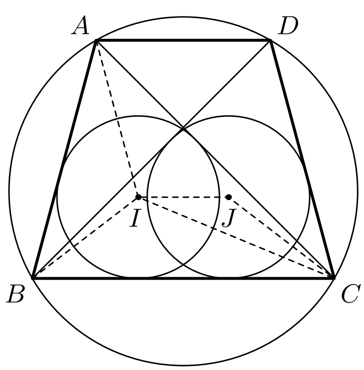
$$\begin{cases} \min(a,b,n)\,, & \text{jeśli } a,b \geqslant n \text{ lub } [a] \neq [b];\\ [a]+(a-[a])(b-[a])\,, & \text{jeśli } [a]=[b]<n. \end{cases}$$

Zadanie **5.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a okręgi wpisane w trójkąty ABC i BCD mają równe promienie. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że także okręgi wpisane w trójkąty CDA i DAB mają równe promienie.

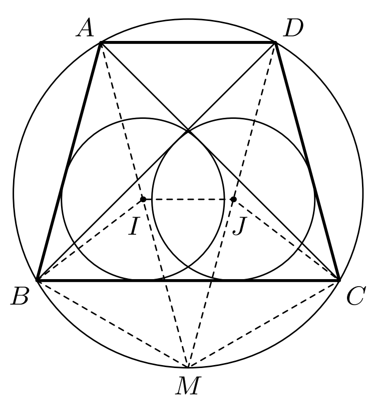
Rozwiązanie

Odpowiedź postawiona na pytanie w treści zadania jest twierdząca.

Niech I, J będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC i BCD (rys. 2).



rys. 2



rys. 3

Z równości promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC i BCD wynika, że proste BC i IJ są równoległe. Ponadto

$$\sphericalangle BIC = 180^\circ - (\tfrac{1}{2}\sphericalangle CBA + \tfrac{1}{2}\sphericalangle BCA) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC\,.$$

* Broszura ta jest dostępna na stronie internetowej Olimpiady: `www.om.edu.pl`

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle BJC = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle BDC$. Z uzyskanych zależności oraz z równości $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ wnioskujemy, że na czworokącie $BCJI$ można opisać okrąg. Zatem $BCJI$ jest trapezem równoramiennym. Stąd uzyskujemy równości

$$\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle IBC = 2\sphericalangle JCB = \sphericalangle DCB\,.$$

W efekcie otrzymujemy, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym o podstawach BC i AD. Stąd wynika, że trójkąty CDA i DAB są przystające, a więc okręgi wpisane w te trójkąty mają równe promienie.

Uwaga

W rozwiązaniu wykazaliśmy, że punkty B, I, J, C leżą na jednym okręgu. Nietrudno wyznaczyć środek tego okręgu: jest nim punkt M przecięcia prostych AI i DJ, czyli środek łuku BC okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ (rys. 3). Dowód tego faktu można znaleźć w broszurze *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek E, str. 113.

Zadanie **6.** Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełniający równanie

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że ciąg (a_n) spełniający warunki zadania nie istnieje.

Przypuśćmy, że ciąg (a_n) spełnia warunki zadania. Rozumowanie przeprowadzimy na dwa sposoby.

Sposób I

Z podanej równości wynika, że ciąg (a_n) jest rosnący, a ponadto

$$a_{n+2}(a_{n+1} - a_n) = a_n a_{n+1}\,. \tag{1}$$

Liczba $a_{n+1} - a_n$ jest podzielna przez największy wspólny dzielnik liczb a_n i a_{n+1}. Z równości (1) wynika zatem, że liczba a_{n+2} jest dzielnikiem liczby

$$\frac{a_n a_{n+1}}{\mathrm{NWD}\,(a_n, a_{n+1})} = \mathrm{NWW}\,(a_n, a_{n+1})\,.$$

Niech $k = \mathrm{NWW}\,(a_1, a_2)$. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdego $n \geqslant 1$, liczba a_n jest dzielnikiem liczby k.

Dla $n = 1$ i $n = 2$ jest to prawda na mocy określenia liczby k.

Jeśli z kolei $a_n \,|\, k$ oraz $a_{n+1} \,|\, k$ dla pewnej liczby $n \geqslant 1$, to liczba k jest wspólną wielokrotnością liczb a_n, a_{n+1}, jest więc podzielna przez najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a_n, a_{n+1}. Stąd, skoro $a_{n+2} \,|\, \mathrm{NWW}\,(a_n, a_{n+1})$, uzyskujemy podzielność $a_{n+2} \,|\, k$. Dowód indukcyjny jest zakończony.

Wcześniej stwierdziliśmy, że ciąg (a_n) jest rosnący. Liczba dodatnia k ma zatem nieskończenie wiele dzielników. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje ciąg (a_n) o żądanych własnościach.

Sposób II

Niech $x_n = 1/a_n$. Wówczas ciąg (x_n) jest zbieżny do 0, a daną w treści zadania równość możemy przepisać w postaci $x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n$. Stosując metodę rozwiązywania rekurencji liniowych (zob. *L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2000, Dodatek A, str. 103) uzyskujemy równość

$$x_n = a\cdot\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^n + b\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n,$$

gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi zależnymi tylko od dwóch początkowych wartości x_1 i x_2.

Wartość bezwzględna liczby $\frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1)$ jest większa od 1, a wartość bezwzględna liczby $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ jest mniejsza od 1. Zatem ciąg (x_n) jest zbieżny do 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$. Stąd uzyskujemy

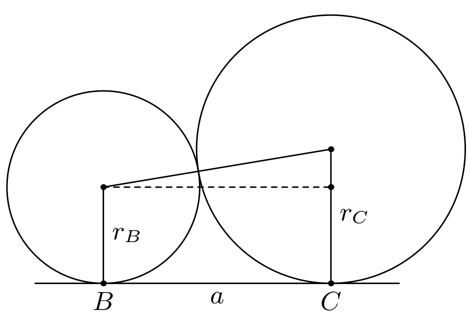
$$x_n = b\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n, \quad \text{a więc} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba a_1/a_2 jest wymierna, a $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ — niewymierna.

Zadanie **7.** Trzy sfery, parami styczne zewnętrznie, są styczne do pewnej płaszczyzny w punktach A, B, C. Znając długości odcinków $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, obliczyć promienie tych sfer.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że rozpatrywane sfery leżą po jednej stronie płaszczyzny, do której są styczne.



rys. 4

Oznaczmy przez r_A, r_B i r_C promienie rozważanych sfer, styczne do danej płaszczyzny odpowiednio w punktach A, B i C. Wówczas na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy (rys. 4)

$$a^2=(r_B+r_C)^2-(r_B-r_C)^2=4r_Br_C\,. \tag{1}$$

Analogicznie uzyskujemy $b^2=4r_Cr_A$ oraz $c^2=4r_Ar_B$. Mnożąc stronami dwie ostatnie równości oraz wykorzystując równość (1) otrzymujemy

$$b^2c^2=(4r_Br_C)\cdot(4r_A^2)=4a^2r_A^2\,,$$

skąd obliczamy $r_A=bc/(2a)$. Analogicznie dostajemy równości

$$r_B=\frac{ca}{2b}\quad\text{oraz}\quad r_C=\frac{ab}{2c}\,.$$

Zadanie **8.** Na okręgu jest umieszczonych n lampek; każda może być włączona albo wyłączona. Wykonujemy serię ruchów; w każdym ruchu wybieramy k kolejnych lampek i zmieniamy ich stan: wyłączone włączamy, a włączone wyłączamy (liczba k nie zmienia się w trakcie tego postępowania). Na początku wszystkie lampki są wyłączone.
Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k\leqslant n$, dla których jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną lampką włączoną.

Rozwiązanie

Załóżmy najpierw, że k jest liczbą parzystą. Udowodnimy indukcyjnie, że po każdej zmianie stanu k kolejnych lampek pali się parzysta liczba lampek.

Niech x_n oznacza liczbę zapalonych lampek po wykonaniu n-tego ruchu. Wówczas $x_1=k$. Załóżmy, że x_{n-1} jest liczbą parzystą. Jeżeli wykonując n-ty ruch włączamy a lampek, a wyłączamy b, to $a+b=k$, więc

$$x_n=x_{n-1}+a-b=x_{n-1}+k-2b\,.$$

Skoro x_{n-1} i k są liczbami parzystymi, to również x_n jest liczbą parzystą. Dowód indukcyjny jest zakończony.

Zatem jeśli k jest liczbą parzystą, to nie jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną włączoną lampką.

Przyjmijmy następnie, że liczby n i k mają wspólny dzielnik $d>1$ i pomalujmy lampki cyklicznie używając d kolorów. (Ściślej mówiąc, postępujemy następująco: numerujemy lampki kolejno liczbami od 1 do n poruszając się po okręgu w ustalonym kierunku, a następnie malujemy je używając d kolorów, przy czym jednakowym kolorem malujemy te lampki, których numery dają z dzielenia przez d taką samą resztę.)

Przypuśćmy, że po wykonaniu pewnego ruchu świeci się dokładnie s_i lampek i-tego koloru ($i=1,2,\ldots,d$). W każdym ruchu zmieniamy stan dokładnie $l=k/d$ lampek i-tego koloru. Jeśli włączamy a_i lampek i-tego koloru, a b_i lampek i-tego koloru wyłączamy, to liczba s_i wzrasta o dokładnie $a_i-b_i=l-2b_i$. Skoro na początku żadna lampka nie jest włączona, to po każdym ruchu liczby $s_1,s_2,\ldots,s_d$ dają z dzielenia przez 2 taką samą resztę. Nie jest zatem możliwe uzyskanie dokładnie jednej lampki włączonej (mielibyśmy wtedy $s_j=1$ dla pewnej liczby j oraz $s_i=0$ dla wszystkich $i\neq j$).

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy k jest taką liczbą nieparzystą, że $\mathrm{NWD}\,(k,n)=1$. Warunek ten jest równoważny równości $\mathrm{NWD}\,(k,2n)=1$. Wykażemy, że przy pomocy rozpatrywanych ruchów można doprowadzić do sytuacji, gdy dokładnie jedna lampka jest włączona.

Stosując algorytm Euklidesa dla liczb k i $2n$ wnioskujemy, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia x oraz liczba całkowita nieujemna y, że

$$kx-(2n)y=1\,. \tag{1}$$

Wybieramy blok k kolejnych lampek i zmieniamy ich stan na przeciwny. Następnie wybieramy blok złożony z k lampek przyległy do poprzedniego i zmieniamy stan tych lampek na przeciwny. Procedurę kontynuujemy poruszając się po danym okręgu w ustalonym kierunku i wykonując łącznie x ruchów.

Z równości (1) wynika, że stan jednej lampki zmieni się dokładnie $2y+1$ razy, a stan każdej innej dokładnie $2y$ razy. W efekcie dokładnie jedna lampka będzie włączona, a pozostałe wyłączone.

Zadanie **9.** Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, dla których ciąg (x_n) określony wzorami

$$x_0=\sqrt{3}, \qquad x_{n+1}=\frac{1+ax_n}{a-x_n} \qquad \text{dla} \quad n=0,1,2,\dots$$

spełnia warunek $x_{n+8}=x_n$ dla $n=0,1,2,\dots$.

Rozwiązanie

Sposób I

Aby ciąg (x_n) był poprawnie określony, musi być $x_n\neq a$ dla każdego $n\geqslant 0$. Niech $\alpha\in(0;\pi)$ będzie taką liczbą, że $a=\operatorname{ctg}\alpha$. Wykażemy indukcyjnie, że

$$x_n=\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{6}\pi-n\alpha) \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,\dots\ . \tag{1}$$

Dla $n=0$ równość (1) jest spełniona. Przyjmijmy, że zachodzi ona dla pewnego n. Jeśli $\operatorname{ctg}x\neq\operatorname{ctg}y$, to

$$\operatorname{ctg}(y-x)=\frac{1+\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y}\,.$$

Warunek $x_n\neq a$ implikuje, że $\operatorname{ctg}(\frac{1}{6}\pi-n\alpha)\neq\operatorname{ctg}\alpha$. Na mocy powyższego wzoru uzyskujemy

$$x_{n+1}=\frac{1+ax_n}{a-x_n}=\frac{1+(\operatorname{ctg}\alpha)\cdot(\operatorname{ctg}(\frac{1}{6}\pi-n\alpha))}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(\frac{1}{6}\pi-n\alpha)}=\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{6}\pi-(n+1)\alpha)\,,$$

co kończy dowód indukcyjny zależności (1).

Funkcja $f(x)=\operatorname{ctg}x$ jest π-okresowa. Korzystając z równości (1) wnioskujemy, że $x_{n+8}=x_n$ dla wszystkich $n\geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita k, że $8\alpha=k\pi$. Stąd uzyskujemy $\alpha=\frac{1}{8}k\pi$, a ponieważ liczba α należy do przedziału $(0;\pi)$, więc k jest jedną z liczb: $1,2,\ldots,7$. Zatem równość $x_{n+8}=x_n$ jest prawdziwa dla $n=0,1,2,\ldots$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest jedną z liczb:

$$\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{8}\pi),\ \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{4}\pi),\ \operatorname{ctg}(\tfrac{3}{8}\pi),\ \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\pi),\ \operatorname{ctg}(\tfrac{5}{8}\pi),\ \operatorname{ctg}(\tfrac{3}{4}\pi),\ \operatorname{ctg}(\tfrac{7}{8}\pi),$$

czyli odpowiednio: $\sqrt{2}+1,\ 1,\ \sqrt{2}-1,\ 0,\ -\sqrt{2}+1,\ -1,\ -\sqrt{2}-1.$

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla powyższych siedmiu wartości a, ciąg (x_n) jest poprawnie określony, tzn. $x_n\neq a$ dla $n=0,1,2\ldots,7$.

Sposób II

Korzystając z danego wzoru rekurencyjnego obliczamy:

$$x_{n+2}=\frac{1+ax_{n+1}}{a-x_{n+1}}=\frac{1+a\cdot\dfrac{1+ax_n}{a-x_n}}{a-\dfrac{1+ax_n}{a-x_n}}=\frac{2a+(a^2-1)x_n}{(a^2-1)-2ax_n}.$$

Stąd uzyskujemy

$$x_{n+4}=\frac{2a+(a^2-1)x_{n+2}}{(a^2-1)-2ax_{n+2}}=\frac{2a+(a^2-1)\cdot\dfrac{2a+(a^2-1)x_n}{(a^2-1)-2ax_n}}{(a^2-1)-2a\cdot\dfrac{2a+(a^2-1)x_n}{(a^2-1)-2ax_n}}=$$

$$=\frac{4a(a^2-1)+((a^2-1)^2-4a^2)x_n}{((a^2-1)^2-4a^2)-4a(a^2-1)x_n}=\frac{A+Bx_n}{B-Ax_n},$$

gdzie $A=4a(a^2-1)$ oraz $B=(a^2-1)^2-4a^2$. Wówczas

$$x_{n+8}=\frac{A+Bx_{n+4}}{B-Ax_{n+4}}=\frac{A+B\cdot\dfrac{A+Bx_n}{B-Ax_n}}{B-A\cdot\dfrac{A+Bx_n}{B-Ax_n}}=\frac{2AB+(B^2-A^2)x_n}{(B^2-A^2)-2ABx_n}.$$

Zatem $x_{n+8}=x_n$ dla wszystkich $n\geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{2AB+(B^2-A^2)x_n}{(B^2-A^2)-2ABx_n}=x_n,\quad\text{czyli}\quad 2AB(1+x_n^2)=0.$$

Ostatnia równość jest spełniona dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A=0$ lub $B=0$. Równość $A=0$ oznacza, że a jest jedną z liczb 0, 1, -1, natomiast równość $B=0$ implikuje, że a równa się $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{2}+1$, $-\sqrt{2}-1$ lub $-\sqrt{2}+1$.

Tak jak w sposobie I pozostało sprawdzić, że ciąg (x_n) jest dla uzyskanych wartości a poprawnie określony.

Zadanie **10.** Spośród wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru n-elementowego X losujemy kolejno ze zwracaniem trzy zbiory A, B, C. Za każdym razem wylosowanie każdego spośród 2^n podzbiorów zbioru X jest jednakowo prawdopodobne. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną liczbę elementów zbioru $A\cap B\cap C$.

Rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych Ω składa się ze wszystkich trójek (A,B,C), gdzie A, B i C są podzbiorami danego zbioru n-elementowego S. Wylosowanie każdej z $(2^n)^3=8^n$ trójek (A,B,C) jest jednakowo prawdopodobne. Niech X_k $(k=0,1,2,\ldots,n)$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że trójka zbiorów (A,B,C) spełnia warunek $|A\cap B\cap C|=k$, gdzie $|F|$ oznacza liczbę elementów zbioru F. Szukamy takiej liczby naturalnej k, dla której prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia X_k jest największe.

Ustalmy liczbę $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$. Obliczymy liczbę trójek (A,B,C), dla których $|A\cap B\cap C|=k$.

Jeśli (A,B,C) jest trójką podzbiorów zbioru S, to każdy element zbioru S znajduje się w dokładnie jednym spośród następujących ośmiu zbiorów

$$\begin{gathered} A\cap B\cap C,\quad (A\cap B)\setminus C,\quad (B\cap C)\setminus A,\quad (C\cap A)\setminus B,\\ A\setminus(B\cup C),\quad B\setminus(C\cup A),\quad C\setminus(A\cup B),\quad S\setminus(A\cap B\cup C). \end{gathered} \tag{1}$$

Aby uzyskać trójkę zbiorów (A,B,C), dla których $|A\cap B\cap C|=k$, wybieramy najpierw k elementów zbioru S, które umieścimy w zbiorze $A\cap B\cap C$ — możemy to uczynić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Każdemu z pozostałych $n-k$ elementów przyporzadkowujemy jedną z pozostałych siedmiu możliwości występujących w (1) — możemy to zrobić na 7^{n-k} sposobów. Opisane postępowanie określa jednoznacznie trójkę (A,B,C). Zatem liczba trójek (A,B,C), dla których $|A\cap B\cap C|=k$ wynosi $\binom{n}{k}\cdot 7^{n-k}$. Stąd uzyskujemy

$$P(X_k)=\frac{\binom{n}{k}\cdot 7^{n-k}}{8^n}\,.$$

Aby wyznaczyć taką liczbę k, dla której prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia X_k jest największe, obliczamy iloraz

$$\frac{P(X_{k+1})}{P(X_k)}=\frac{n-k}{7k+7}\,.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{cases} P(X_{k+1})>P(X_k), & \text{jeśli } k<\frac{1}{8}(n-7);\\ P(X_{k+1})<P(X_k), & \text{jeśli } k>\frac{1}{8}(n-7);\\ P(X_{k+1})=P(X_k), & \text{jeśli } k=\frac{1}{8}(n-7). \end{cases}$$

Oznaczając $\lambda=[(n-7)/8]$, gdzie $[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x, otrzymujemy

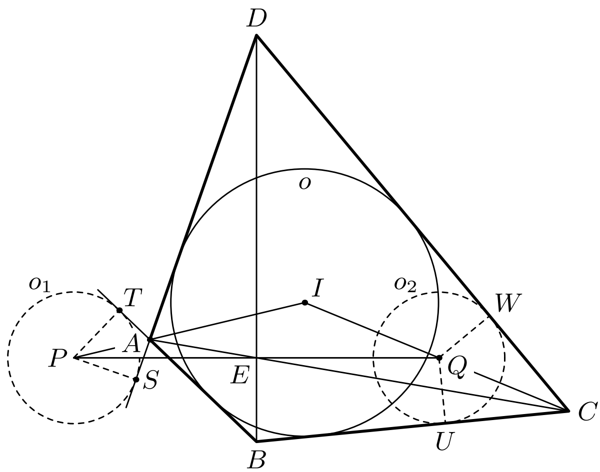
$$\begin{gathered} P(X_0)<P(X_1)<P(X_2)<\ldots<P(X_\lambda)\leqslant P(X_{\lambda+1})\,,\\ P(X_{\lambda+1})>P(X_{\lambda+2})>\ldots>P(X_n)\,. \end{gathered}$$

Zatem prawdopodobieństwo $P(X_k)$ jest największe dla $k=\lambda+1=[\frac{1}{8}(n+1)]$. Jeśli $\frac{1}{8}(n-7)$ jest liczbą całkowitą, to istnieją dwie wartości k, dla których liczba $P(X_k)$ jest największa, a mianowicie $k=\frac{1}{8}(n-7)$ oraz $k=\frac{1}{8}(n+1)$.

Zadanie **11.** Okrąg o środku I jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$, przy czym punkt I nie leży na prostej AC. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E oraz prostopadła do prostej BD przecina proste AI, CI odpowiednio w punktach P, Q. Wykazać, że $PE=EQ$.

Rozwiązanie

Niech o_1 będzie okręgiem o środku P i stycznym do prostych AD i AB odpowiednio w punktach S i T. Analogicznie, niech o_2 będzie okręgiem o środku Q i stycznym do prostych CB i CD odpowiednio w punktach U i W (rys. 5). Oznaczmy przez o okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt Q leży na *odcinku* CI.



rys. 5

Korzystając z twierdzenia Menelausa dla trójkąta PIQ uzyskujemy

$$\frac{PE}{EQ}=\frac{CI}{CQ}\cdot\frac{AP}{AI}=\frac{r}{r_2}\cdot\frac{r_1}{r}=\frac{r_1}{r_2},$$

gdzie r, r_1 i r_2 są odpowiednio promieniami okręgów o, o_1 i o_2. Stąd

(1) $$\frac{PE}{r_1}=\frac{EQ}{r_2}=\lambda.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $a=BT$, $b=DS$, $c=BU$, $d=DW$. Wówczas otrzymujemy zależności:

(2) $$\begin{gathered} a-b=AB-AD=CB-CD=c-d, \\ a^2-b^2=PB^2-PD^2=BE^2-DE^2=QB^2-QD^2=c^2-d^2. \end{gathered}$$

Zatem jeśli $a=b$, to $AB=AD$ oraz $CB=CD$; w tym przypadku punkt I leży na przekątnej AC, co przeczy założeniom. Stąd mamy $a\neq b$, a więc również $c\neq d$. Z równości (2) otrzymujemy wówczas $a+b=c+d$, co w połączeniu z zależnością $a-b=c-d$ daje $a=c$ i $b=d$. Zatem

(3) $$PE^2-EQ^2=PD^2-QD^2=(r_1^2+b^2)-(r_2^2+d^2)=r_1^2-r_2^2.$$

Równości (1) i (3) pociągają zależność $(\lambda^2-1)(r_1^2-r_2^2)=0$.

Przypuśćmy, że $\lambda=1$. Wówczas $EQ=r_2$, a więc okrąg o_2 jest wpisany w trójkąt BCD. Ponieważ w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, więc okrąg ω wpisany w trójkąt ABD jest styczny do okręgu o_2. Stąd wynika, że punkty Q, E oraz środek okręgu ω leżą na jednej prostej. To jednak nie jest możliwe, gdyż punkty te znajdują się odpowiednio na bokach IC, CA, AI trójkąta AIC i są różne od jego wierzchołków. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że $\lambda\neq 1$.

Z uzyskanej wyżej równości wynika zatem, że $r_1=r_2$, czyli $PE=EQ$.

Zadanie **12.** Dane są funkcje

$$f(x)=2^x \quad \text{oraz} \quad g(x)=f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$$

(7-krotna iteracja funkcji f). Rozstrzygnąć, czy liczba $g(3)-g(0)$ jest podzielna przez liczbę $g(2)-g(0)$.

Rozwiązanie

Liczby $g(0)$, $g(2)$ i $g(3)$ są odpowiednio wyrazami a_7, b_7 i c_7 ciągów (a_n), (b_n) i (c_n) określonych rekurencyjnie wzorami

$$\begin{cases} a_0=0 \\ a_{n+1}=2^{a_n}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0=2 \\ b_{n+1}=2^{b_n}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0=3 \\ c_{n+1}=2^{c_n}\,. \end{cases}$$

Wykażemy, że liczba $c_7-a_7=g(3)-g(0)$ nie dzieli się przez $b_7-a_7=g(2)-g(0)$. W dowodzie skorzystamy z następującego lematu:

Lemat

Dane są takie liczby całkowite dodatnie k i l, że liczba 2^l-1 jest podzielna przez 2^k-1. Wówczas liczba l jest podzielna przez k.

Dowód

Niech $l=kq+r$, gdzie $r\in\{0,1,2,\ldots,k-1\}$. Liczby 2^l-1 i $2^{kq}-1$ są podzielne przez 2^k-1, zatem różnica tych liczb, czyli liczba $2^l-2^{kq}=2^{kq}(2^r-1)$ jest podzielna przez 2^k-1. Liczby 2^{kq} i 2^k-1 są względnie pierwsze, skąd wynika, że liczba 2^r-1 jest podzielna przez 2^k-1. Ponieważ $r<k$, więc podzielność ta ma miejsce jedynie wtedy, gdy $r=0$. To oznacza, że liczba l jest podzielna przez k.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Przypuśćmy, że $b_7-a_7\,|\,c_7-a_7$. Wtedy $2^{b_6}-2^{a_6}\,|\,2^{c_6}-2^{a_6}$, skąd wynika, że $2^{b_6-a_6}-1\,|\,2^{c_6-a_6}-1$. Korzystając z lematu uzyskujemy $b_6-a_6\,|\,c_6-a_6$.

Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do podzielności $b_0-a_0\,|\,c_0-a_0$, czyli $2\,|\,3$, co nie jest prawdą.

(*wp*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`