LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

15 kwietnia 2004 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Okręgi styczne do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B przechodzą przez punkt D i przecinają się po raz drugi w punkcie E. Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu C względem symetralnej odcinka AB. Wykazać, że punkty D, E i F leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że punkt E leży wewnątrz trójkąta ABC. Wówczas

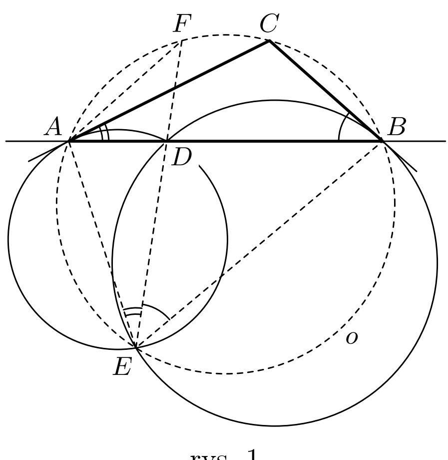
$$\sphericalangle AED = 180^\circ - \sphericalangle BAC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BED = 180^\circ - \sphericalangle ABC\,.$$

Dodając równości te stronami mamy $180^\circ > \sphericalangle AEB = 180^\circ + \sphericalangle ACB > 180^\circ$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że punkty C i E leżą po przeciwnych stronach prostej AB (rys. 1).

Z równości $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED + \sphericalangle DEB = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle ACB$ wynika zatem, że punkty A, E, B, C leżą, w tej właśnie kolejności, na jednym okręgu o. Stąd wniosek, że punkt F leży również na okręgu o, czyli

$$\sphericalangle FEB = \sphericalangle FAB = \sphericalangle CBD = \sphericalangle BED\,.$$

Równość ta oznacza, że punkty D, E i F leżą na jednej prostej.



rys. 1

Zadanie **2.** Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych, dla których wielomian W przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.

Rozwiązanie

Ciąg różnych liczb całkowitych $x_0,x_1,x_2,\ldots$ taki, że wartości $W(x_i)$ są parami względnie pierwsze, zbudujemy indukcyjnie. Dwa początkowe wyrazy $x_0=a$, $x_1=b$ to liczby, których istnienie jest dane w założeniach.

Przyjmijmy, że zostały już określone różne liczby $x_0,x_1,\ldots,x_n$, dla których wartości $y_i=W(x_i)$ są parami względnie pierwsze. Liczba y_0 jest względnie pierwsza z iloczynem $y_1y_2\ldots y_n$; istnieją zatem takie liczby całkowite k, m, że $ky_0+my_1y_2\ldots y_n=1$. Określamy kolejny wyraz ciągu:

$$x_{n+1}=b+(a-b)ky_0+zy_0y_1\ldots y_n\,,$$

gdzie z jest liczbą naturalną tak dużą, żeby liczba x_{n+1} była różna od liczb $x_0,x_1,\ldots,x_n$. Oczywiście

$$x_{n+1}\equiv b \pmod{y_0};$$

a z przekształcenia $x_{n+1}=b+(a-b)(1-my_1y_2\ldots y_n)+zy_0y_1\ldots y_n$ widać, że

$$x_{n+1}\equiv a \pmod{y_1y_2\ldots y_n}.$$

Stosując do obu stron każdej z tych dwóch kongruencji wielomian W (co jest dozwolone, skoro kongruencje o wspólnym module można dodawać i mnożyć), dostajemy związki

$$W(x_{n+1})\equiv W(b) \pmod{y_0},\qquad W(x_{n+1})\equiv W(a) \pmod{y_1y_2\ldots y_n}.$$

To znaczy, że dla pewnych liczb całkowitych s,t zachodzą równości

$$W(x_{n+1})=W(b)+sy_0,\qquad W(x_{n+1})=W(a)+ty_1y_2\ldots y_n.$$

A ponieważ wartość $W(b)=y_1$ jest względnie pierwsza z y_0, zaś wartość $W(a)=y_0$ jest względnie pierwsza z iloczynem $y_1y_2\ldots y_n$, zatem z uzyskanych równości wynika, że wartość $W(x_{n+1})=y_{n+1}$ jest względnie pierwsza zarówno z y_0, jak i z $y_1y_2\ldots y_n$.

Kontynuując to postępowanie otrzymujemy nieskończony ciąg (x_i) dający wartości $y_i=W(x_i)$ parami względnie pierwsze.

Zadanie **3.** W pewnym turnieju wzięło udział n zawodników ($n\geqslant 3$). Każdy grał z każdym dokładnie jeden raz, nie było remisów. Trójelementowy zbiór zawodników nazwiemy *trójką remisową*, jeśli można tak ponumerować tych trzech zawodników, że pierwszy wygrał z drugim, drugi z trzecim, a trzeci z pierwszym. Wyznaczyć największą liczbę trójek remisowych, jaka mogła się pojawić w turnieju.

Rozwiązanie

Zamiast wyznaczać największą liczbę trójek remisowych, wyznaczymy najmniejszą liczbę trójek, które nie są remisowe.

Ponumerujmy zawodników liczbami od 1 do n i przyjmijmy, że zawodnik o numerze i wygrał x_i razy. Wówczas liczba wszystkich rozgrywek wynosi

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\binom{n}{2}.$$

Każda nieremisowa trójka jest wyznaczona jednoznacznie przez zawodnika, który wygrał z dwoma innymi zawodnikami tej trójki. Zatem zawodnik o numerze i wyznacza $\binom{x_i}{2}$ nieremisowych trójek, a liczba wszystkich nieremisowych trójek w turnieju wynosi

$$\binom{x_1}{2}+\binom{x_2}{2}+\ldots+\binom{x_n}{2}=\frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\Bigg)=\frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\binom{n}{2}\Bigg).$$

W dalszej części rozwiązania rozpatrzymy dwa przypadki:

(a) Liczba n jest nieparzysta, tzn. $n=2k+1$. Wówczas na mocy nierówności pomiędzy średnią kwadratową a średnią arytmetyczną uzyskujemy

$$(1)\qquad \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\binom{n}{2}\Bigg)\geqslant\frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{n}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}x_i\Bigg)^2-\binom{n}{2}\Bigg)=\frac{n(n-1)(n-3)}{8}.$$

Zatem liczba trójek remisowych nie przekracza

$$\binom{n}{3}-\frac{n(n-1)(n-3)}{8}=\frac{n(n^2-1)}{24}.$$

Powyższa liczba trójek remisowych wystąpi jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik wygra dokładnie k razy (w nierówności (1) zachodzi wtedy równość). Taki układ wyników rozgrywek możemy uzyskać w następujący sposób. Sadzamy zawodników przy okrągłym stole i zakładamy, że każdy z nich wygrał tylko z tymi zawodnikami, którzy siedzą po jego prawej stronie w odległości nie większej niż k miejsc. Przy takim układzie rozgrywek każdy zawodnik wygrał dokładnie k razy.

(b) Liczba n jest parzysta, tzn. $n=2k$. Wówczas $(x_i-k)(x_i-k+1)\geqslant 0$ dla $i=1,2,\ldots,n$, skąd otrzymujemy $x_i^2\geqslant(2k-1)x_i-k(k-1)$. Zatem

$$(2)\quad \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\binom{n}{2}\Bigg)\geqslant\frac{1}{2}\Bigg((2k-1)\sum_{i=1}^{n}x_i-nk(k-1)-\binom{n}{2}\Bigg)=\frac{n(n-2)^2}{8}.$$

Stąd wynika, że liczba trójek remisowych nie przekracza

$$\binom{n}{3}-\frac{n(n-2)^2}{8}=\frac{n(n^2-4)}{24}.$$

Powyższa liczba trójek remisowych wystąpi jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik wygra k lub $k-1$ razy (w nierówności (2) zachodzi wtedy równość). Taki układ wyników rozgrywek możemy uzyskać w następujący sposób. Tak jak wyżej, sadzamy zawodników przy okrągłym stole i przyjmujemy, że każdy z nich wygrał z zawodnikami, którzy siedzą po jego prawej stronie w odległości nie większej niż $k-1$ miejsc. Wynik rozgrywki pomiędzy zawodnikami siedzącymi naprzeciwko siebie ustalamy dowolnie. W ten sposób każdy zawodnik wygrał k lub $k-1$ razy.

Reasumując: największa liczba trójek remisowych, jaka może się pojawić w turnieju wynosi $\frac{1}{24}n(n^2-1)$, jeśli n jest liczbą nieparzystą oraz $\frac{1}{24}n(n^2-4)$, jeśli n jest liczbą parzystą.

LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

16 kwietnia 2004 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to

$$\sqrt{2(a^2+b^2)}+\sqrt{2(b^2+c^2)}+\sqrt{2(c^2+a^2)} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{3(a+b)^2+3(b+c)^2+3(c+a)^2}.$$

Rozwiązanie

Podnosząc zadaną nierówność stronami do kwadratu, dostajemy do udowodnienia nierówność równoważną, której lewa strona jest równa

$$4(a^2+b^2+c^2)+4\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}+4\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}+4\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)},$$

natomiast prawa wynosi $6(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)$. Po redukcji wyrazów podobnych i podzieleniu stronami przez 2 pozostaje do wykazania, że

$$2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}+2\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}+2\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \geqslant$$
$$\geqslant a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)\,.$$

Na mocy nierówności $\sqrt{2x^2+2y^2} \geqslant |x+y|$, prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y (sprawdzenie przez podniesienie do kwadratu), dostajemy

$$2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \geqslant |(a+b)(b+c)| \geqslant b^2+(ab+bc+ca)\,.$$

Analogicznie uzyskujemy

$$2\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geqslant c^2+(ab+bc+ca),\ 2\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \geqslant a^2+(ab+bc+ca).$$

Sumując stronami trzy ostatnie nierówności otrzymujemy tezę.

Zadanie **5.** Wyznaczyć największą liczbę prostych w przestrzeni, przechodzących przez ustalony punkt i takich, że każde dwie przecinają się pod jednakowym kątem.

Rozwiązanie

Niech $\ell_1,\ldots,\ell_n$ będą prostymi, o jakich mowa, przechodzącymi przez wspólny punkt O. Para przecinających się prostych wyznacza na zawierającej je płaszczyźnie cztery kąty: dwa kąty wierzchołkowe o mierze $\alpha \leqslant 90^\circ$ i pozostałe dwa kąty o mierze $180^\circ-\alpha$. Zgodnie z założeniem, wartość α jest dla każdej pary ℓ_i, ℓ_j taka sama.

Weźmy pod uwagę sferę S o środku O i dowolnym promieniu, i oznaczmy przez A_i, B_i punkty przecięcia prostej ℓ_i z tą sferą. Każdy z odcinków A_iA_j, A_iB_j, B_iB_j (dla $i \neq j$) jest cięciwą sfery S, wyznaczoną przez kąt środkowy o mierze α lub $180^\circ - \alpha$. Zatem te odcinki mają co najwyżej dwie różne długości a i b.

Ustalmy oznaczenia tak, by $\sphericalangle A_iOA_n = \alpha$ dla $i = 1,\ldots,n-1$. Wówczas punkty $A_1,\ldots,A_{n-1}$ leżą na jednym okręgu (położonym w płaszczyźnie prostopadłej do prostej ℓ_n). Niech A_1C będzie średnicą tego okręgu. Każdy z punktów $A_2,\ldots,A_{n-1}$ leży w odległości a lub b od punktu A_1; wobec tego na każdym z dwóch półokręgów o końcach A_1 i C leżą co najwyżej dwa punkty ze zbioru $\{A_2,\ldots,A_{n-1}\}$. Stąd wniosek, że jest to zbiór co najwyżej czteroelementowy; a to znaczy, że $n \leqslant 6$.

Z drugiej strony, jeśli $n = 6$, to możemy umieścić punkty $A_1, A_2, \ldots, A_5$ w wierzchołkach pięciokąta foremnego, zaś płaszczyznę tego pięciokąta umieścić w takiej odległości od punktu A_6, aby te sześć punktów, wraz z antypodycznymi do nich punktami $B_1,\ldots,B_6$, były wierzchołkami dwudziestościanu foremnego. Odcinki A_iB_i (średnice sfery S) łączą przeciwległe wierzchołki tego dwudziestościanu i każde dwa z nich tworzą jednakowy kąt. Zatem $n = 6$ jest największą możliwą liczbą prostych ℓ_i.

Zadanie **6.** Dana jest liczba całkowita $m > 1$. Nieskończony ciąg liczb całkowitych $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony przez warunki

$$x_i = \begin{cases} 2^i & \text{dla } i < m, \\ x_{i-1} + x_{i-2} + \ldots + x_{i-m} & \text{dla } i \geqslant m. \end{cases}$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną k, dla której istnieje k kolejnych wyrazów tego ciągu podzielnych przez m.

Rozwiązanie

Wzór rekurencyjny

$$(1) \qquad x_i - x_{i-1} - x_{i-2} - \ldots - x_{i-m} = 0 \quad \text{dla } i \geqslant m$$

działa zarówno „do przodu”, jak i „do tyłu”; to znaczy, że każdy odcinek m kolejnych wyrazów ciągu (x_i) wyznacza zarówno wszystkie wyrazy późniejsze, jak i wszystkie wyrazy wcześniejsze. Ta sama uwaga odnosi się też do ciągu $r_0, r_1, r_2, \ldots$, gdzie r_i jest resztą z dzielenia x_i przez m; wzór (1) implikuje wzór

$$(2) \qquad r_i - r_{i-1} - r_{i-2} - \ldots - r_{i-m} \equiv 0 \pmod{m} \quad \text{dla } i \geqslant m.$$

W ciągu (r_i) każdy odcinek długości m jest układem złożonym z m liczb ze zbioru $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Ponieważ jest tylko skończenie wiele takich układów, muszą się one powtarzać: istnieją numery s, t $(s < t)$ takie, że

$$(r_t, r_{t+1}, r_{t+2}, \ldots, r_{t+m-1}) = (r_s, r_{s+1}, r_{s+2}, \ldots, r_{s+m-1}).$$

Każdy z tych dwóch odcinków ciągu (r_i) jednoznacznie wyznacza wyraz bezpośrednio go poprzedzający; na mocy wzoru (2) te wyrazy też są równe: $r_{t-1} = r_{s-1}$. Zatem

$$(r_{t-1}, r_t, r_{t+1}, \ldots, r_{t+m-2}) = (r_{s-1}, r_s, r_{s+2}, \ldots, r_{s+m-2}).$$

Cofając się w ten sposób dojdziemy do odcinka identycznego z odcinkiem początkowym:

$$(r_d, r_{d+1}, r_{d+2}, \ldots, r_{d+m-1}) = (r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}),$$

gdzie $d = t - s$. Tak więc

$$r_d = 1,\ r_{d+1} = 2,\ r_{d+2} = 4,\ \ldots,\ r_{d+m-1} = (2^{m-1} \bmod m).$$

Cofając się dalej, zgodnie ze wzorem (2), stwierdzamy kolejno, że

$$r_{d-1} = 1,\ r_{d-2} = 0,\ r_{d-3} = 0,\ \ldots,\ r_{d-m} = 0,$$

i mamy $m-1$ kolejnych wyrazów $x_{d-m}, \ldots, x_{d-2}$ podzielnych przez m.

Oczywiście nie istnieje m kolejnych wyrazów x_i podzielnych przez m, bo wówczas, w myśl wzoru (1), cały ciąg (x_i) składałby się z liczb podzielnych przez m, wbrew temu, że $x_0 = 1$. Zatem szukana maksymalna wartość k wynosi $m-1$.

(*mek, wp*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`