LIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2003 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita $n > 2003$, że w ciągu

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \ldots,\ \binom{n}{2003}$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Dwusieczne kątów DAB i ABC przecinają się w punkcie P, a dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie Q. Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktów D i A. Punkt N jest środkiem tego łuku DA okręgu o, który nie zawiera punktów B i C. Dowieść, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do MN.

3. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x$. Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb całkowitych a, b spełniających równanie

$$W(a) = W(b)\,.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2003 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ istnieją liczby całkowite x, y, k spełniające warunki: $0 < 2k < p$ oraz

$$kp + 3 = x^2 + y^2 .$$

5. Punkt A leży na zewnątrz okręgu o o środku O. Z punktu A poprowadzono dwie proste styczne do okręgu o odpowiednio w punktach B i C. Pewna styczna do okręgu o przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Proste OE i OF przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że z odcinków BP, PQ i QC można zbudować trójkąt podobny do trójkąta AEF.

6. Każdej parze liczb całkowitych nieujemnych (x,y) jest przyporządkowana liczba $f(x,y)$ zgodnie z warunkami:

$$f(0,0) = 0 ;$$
$$f(2x,2y) = f(2x+1,2y+1) = f(x,y) ,$$
$$f(2x+1,2y) = f(2x,2y+1) = f(x,y)+1 \quad \text{dla} \quad x,y \geqslant 0 .$$

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną i niech a, b będą takimi liczbami całkowitymi nieujemnymi, że $f(a,b) = n$. Rozstrzygnąć, ile jest liczb x spełniających równanie

$$f(a,x) + f(b,x) = n .$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.