LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2002 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych a, b, c, że liczby a^2+1 i b^2+1 są pierwsze oraz

$$(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1\,.$$

Rozwiązanie

Bez szkody dla ogólności rozwiązania możemy założyć, że $a\leqslant b$. Niech $p=b^2+1$. Wówczas liczba $(c^2+1)-(b^2+1)=(c-b)(c+b)$ dzieli się przez p. Z danej w treści zadania równości wynika, że $b<c$. Ponadto

$$c=\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)-1}\leqslant\sqrt{(b^2+1)^2-1}<b^2+1=p\,.$$

Stąd $c-b<p$ oraz $c+b<2p$. Skoro $p\,|\,(c-b)(c+b)$, więc musi być $c+b=p$, czyli

$$c=b(b-1)+1. \tag{1}$$

Liczby $a=b=1$ nie spełniają warunków zadania; możemy więc przyjąć, że $b>1$. Wówczas p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Z zależności (1) wynika, że c jest nieparzyste, a to dowodzi kolejno parzystości liczb c^2+1 oraz a^2+1. Liczba a^2+1 jest pierwsza, a więc $a^2+1=2$, skąd $a=1$. Zatem dane w zadaniu równanie przybiera postać

$$2(b^2+1)=c^2+1\,. \tag{2}$$

Łącząc równości (1) i (2) uzyskujemy $2b^2+2=b^2(b-1)^2+2b(b-1)+2$, czyli $2b=b(b-1)^2+2b-2$. Stąd b jest dzielnikiem liczby 2, a ponieważ $b>1$, więc musi być $b=2$. To pociąga za sobą $c=3$.

Pozostaje stwierdzić, że trójka $(a,b,c)=(1,2,3)$ spełnia warunki zadania.

Uwalniając się od założenia $a\leqslant b$ otrzymujemy dwie trójki (a,b,c) spełniające warunki zadania. Są nimi: $(1,2,3)$ oraz $(2,1,3)$.

Zadanie **2.** Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ACPQ$ i $BKLC$ o równych polach. Udowodnić, że środek odcinka PL, punkt C oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 1). Uzupełnijmy trójkąt PCL do równoległoboku $PCLX$. Wystarczy udowodnić, że punkty X, C, O są współliniowe.

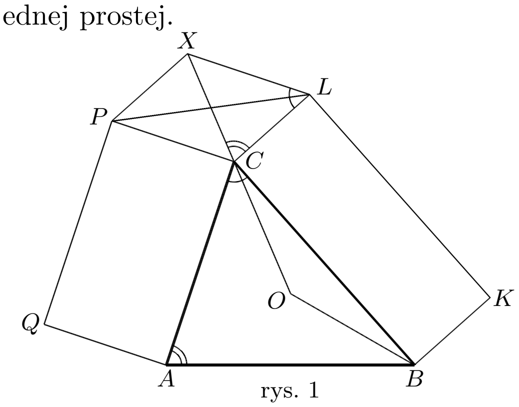
Z równości pól danych prostokątów otrzymujemy

$$\frac{XL}{LC}=\frac{PC}{LC}=\frac{BC}{CA}\,.$$

Ponadto $\sphericalangle XLC = 180^\circ - \sphericalangle PCL = \sphericalangle BCA$. Uzyskane zależności dowodzą, że trójkąty XLC oraz BCA są podobne. Stąd oraz z równości $BO = CO$ wynika kolejno, że

$$\sphericalangle XCL = \sphericalangle BAC = \tfrac{1}{2}\sphericalangle BOC = 90^\circ - \sphericalangle BCO,$$

czyli $\sphericalangle XCL + \sphericalangle LCB + \sphericalangle BCO = 180^\circ$. Ostatnia równość oznacza, że punkty X, C, O leżą na jednej prostej.



rys. 1

Zadanie **3.** Na tablicy są napisane trzy nieujemne liczby całkowite. Wybieramy z tej trójki dwie liczby k, m i zastępujemy je liczbami $k+m$ i $|k-m|$, a trzecia liczba pozostaje bez zmiany. Z otrzymaną trójką postępujemy tak samo. Rozstrzygnąć, czy z każdej początkowej trójki liczb całkowitych nieujemnych, kontynuując to postępowanie, można otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

Rozwiązanie

Każdą trójkę liczb całkowitych nieujemnych można przedstawić w postaci

(1) $$(2^p a, 2^q b, 2^r c)$$

gdzie p, q, r są liczbami całkowitymi nieujemnymi, zaś każda z liczb a, b, c jest nieparzysta lub równa 0. *Wagą* trójki przedstawionej w postaci (1) nazwiemy wielkość $a+b+c$.

Wykażemy, że z każdej trójki liczb całkowitych nieujemnych o co najmniej dwóch liczbach niezerowych, wykonując operacje opisane w treści zadania, da się uzyskać trójkę o *mniejszej* wadze. Tym samym udowodnimy, że zawsze można otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

Załóżmy więc, że w trójce $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$ co najmniej dwie liczby są różne od 0. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $b, c \neq 0$ oraz $q \leqslant r$.

Wykonując $2(r-q)$-krotnie operację $(k,l,m) \mapsto (k+l, |k-l|, m)$ przeprowadzamy trójkę $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$ na trójkę $(2^{p+r-q} a, 2^r b, 2^r c)$, którą następnie przekształcamy na $(2^{p+r-q} a, 2^r |b-c|, 2^r (b+c))$. Liczby b i c są nieparzyste, więc waga ostatniej trójki nie przekracza

$$a + \tfrac{1}{2}|b-c| + \tfrac{1}{2}(b+c) = a + \max(b,c),$$

co jest mniejsze od $a+b+c$, czyli od wagi trójki $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$. *(wp, jwr)*

LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2002 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ i dla każdego ciągu liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi co najmniej jedna z nierówności

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqslant \frac{n}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i-2}} \geqslant \frac{n}{2}$$

(przyjmujemy $x_{n+1}=x_1$, $x_{n+2}=x_2$ oraz $x_0=x_n$, $x_{-1}=x_{n-1}$).

Rozwiązanie

Gdyby żadna z podanych nierówności nie zachodziła, to po dodaniu stronami mielibyśmy $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}+x_{i+2}}{x_i+x_{i+1}} < n$. Wystarczy zatem udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}+x_{i+2}}{x_i+x_{i+1}} \geqslant n, \quad \text{albo, że} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}+x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{x_i+x_{i+1}} \geqslant 2n\,.$$

Po podstawieniu $a_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{x_i+x_{i+1}}$ ostatnia nierówność przybiera postać

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{a_{i+1}} \geqslant 2n\,, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{a_i} \geqslant 2n\,,$$

a to jest prawda, gdyż $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ dla dowolnej liczby dodatniej a.

Zadanie **5.** W przestrzeni dany jest trójkąt ABC oraz sfera s rozłączna z płaszczyzną ABC. Przez każdy z punktów A, B, C poprowadzono prostą styczną do tej sfery. Punkty styczności oznaczono odpowiednio K, L, M. Punkt P leży na sferze s i spełnia warunki

$$\frac{AK}{AP} = \frac{BL}{BP} = \frac{CM}{CP}\,.$$

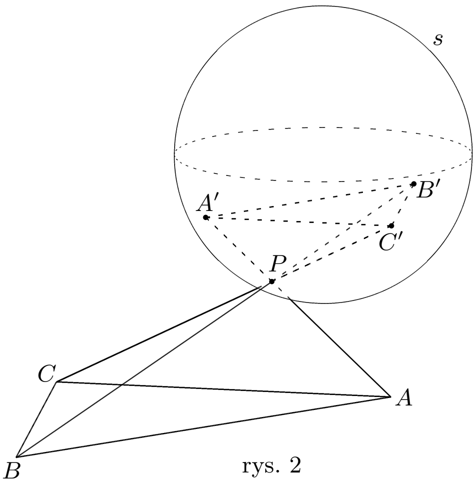
Udowodnić, że sfera opisana na czworościanie $ABCP$ jest styczna do sfery s.

Rozwiązanie

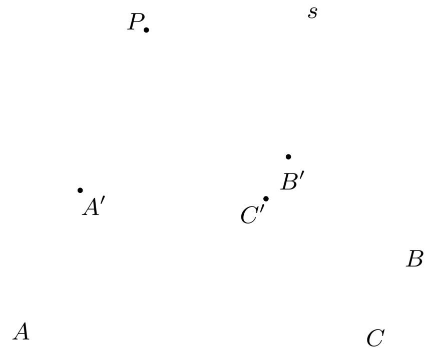
Oznaczmy przez λ wspólną wartość danych w treści zadania ułamków. Niech A', B', C' będą odpowiednio drugimi punktami przecięcia prostych PA, PB, PC ze sferą s (rys. 2 i 3). Jeśli któraś z tych prostych, powiedzmy PA, jest styczna do sfery s, to przyjmujemy $A'=P$. Wówczas $AK^2 = AP \cdot AA'$, a więc

$$(1) \qquad \frac{AA'}{AP} = \left(\frac{AK}{AP}\right)^2 = \lambda^2. \quad \text{Zatem} \quad \frac{AA'}{AP} = \frac{BB'}{BP} = \frac{CC'}{CP} = \lambda^2.$$

Stąd wynika, że jednokładność j o środku P przekształcająca punkt A na A', przeprowadza punkt B na B' oraz punkt C na C'. Ponadto każdy z punktów A', B', C' jest różny od P — w przeciwnym razie równości (1) implikują, że proste PA, PB, PC są styczne do sfery s w punkcie P, a więc P jest punktem wspólnym płaszczyzny ABC i sfery s, co przeczy założeniom.



rys. 2



rys. 3

Sfera opisana na czworościanie $ABCP$ jest zatem obrazem sfery s przy jednokładności j^{-1}, której środek (punkt P) leży na sferze s. Stąd teza.

Zadanie **6.** Dana jest liczba naturalna k. Określamy ciąg (a_n) wzorami

$$a_1 = k+1, \qquad a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k \text{ dla } n \geqslant 1\,.$$

Wykazać, że jeżeli $m \neq n$, to liczby a_m i a_n są względnie pierwsze.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw indukcyjnie, że dla $n \geqslant 1$ zachodzi równość

(1) $$a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n + k.$$

Z danej w treści zadania zależności rekurencyjnej obliczamy

$$a_2 = (k+1)^2 - k(k+1) + k = 2k+1 = a_1 + k,$$

co dowodzi prawdziwości zdania (1) dla $n=1$, natomiast krok indukcyjny sprowadza się do ciągu równości:

$$a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k = a_n(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} + k) - ka_n + k = a_1 a_2 \ldots a_n + k\,.$$

Przypuśćmy teraz, że p jest wspólnym dzielnikiem pierwszym liczb a_l i a_m, przy czym $l > m$. Wówczas z zależności (1) dla $n = l-1$ wynika, że $p \mid k$, a więc $p \nmid a_1$. Niech r będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $p \mid a_r$ (taka liczba r istnieje). Wtedy $1 < r \leqslant m$. Stosując ponownie równość (1), lecz tym razem dla $n = r-1$ wnioskujemy, że p jest dzielnikiem jednej z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$, wbrew temu, że r jest najmniejszą liczbą o własności $p \mid a_r$.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczby a_l i a_m są względnie pierwsze.

(*wp, jwr*)