L Olimpiada Matematyczna
Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

Zadania na dzień 26 lutego 1999 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest funkcja $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ taka, że $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Wykazać, że nie istnieją takie funkcje rosnące $g\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, $h\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, że $f = g - h$.

2. Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów jednostkowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.

3. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i CD, przy czym $AE : EB = CF : FD$. Punkt P leży na odcinku EF i spełnia warunek $EP : PF = AB : CD$. Udowodnić, że stosunek pól trójkątów APD i BPC nie zależy od wyboru punktów E i F.

Zadania na dzień 27 lutego 1999 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki: $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCA$ oraz $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBA$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to kąt APO jest prosty.

5. Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon S \to S$ spełniających równość $f^{50}(x) = x$ dla wszystkich $x \in S$.

Uwaga: $f^{50}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{50}(x)$.

6. Dana jest liczba naturalna $k \geq 2$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające warunki

$$a_1 + 2^i a_2 + 3^i a_3 + \ldots + n^i a_n = 0 \qquad \text{dla} \;\; i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Dowieść, że liczba $a_1 + 2^k a_2 + 3^k a_3 + \ldots + n^k a_n$ jest podzielna przez $k!$.