XLIX Olimpiada Matematyczna
Szkice rozwiązań zadań z zawodów trzeciego stopnia

1. Dodając równania danego układu stronami i przekształcając otrzymujemy równość $A+B+X+Y=4$, gdzie

$$A=(ab-1)(c-1)\,,\qquad B=(a-1)(b-1)\,,$$
$$X=(xy-1)(z-1)\,,\qquad Y=(x-1)(y-1)\,.$$

Liczby A, B, X, Y są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Jeśli $c\geqslant 2$, to $A\geqslant 3$, $B\geqslant 1$ i w konsekwencji $A=3$, $B=1$, $X=0$, $Y=0$, co daje rozwiązanie

$$(a,b,c,x,y,z)=(2,2,2,6,1,1)\,.$$

Analogicznie, założenie $z\geqslant 2$ prowadzi do rozwiązania

$$(a,b,c,x,y,z)=(6,1,1,2,2,2)\,.$$

Pozostaje możliwość $c=z=1$. Wówczas $A=X=0$, więc $B+Y=4$. W wyniku prostego rozumowania otrzymujemy dalszych pięć układów (a,b,c,x,y,z) spełniających zadane równania:

$$(3,2,1,3,2,1),\ (3,3,1,7,1,1),\ (5,2,1,8,1,1),\ (7,1,1,3,1,1),\ (8,1,1,5,2,1).$$

* * * * *

2. Załóżmy, że dla pewnej liczby całkowitej $r\geqslant 0$ zachodzi równość: $x_r=1$, przy czym r jest najmniejszym numerem o tej własności. Jeśli $r=0$, to $F_k=F_m$, skąd $k=0$, $m=1$. Dalej zakładamy, że $r\geqslant 1$. W podanym wzorze rekurencyjnym podstawiamy $n=r-1$ i wyznaczamy $x_{r-1}=2/3$. Zgadujemy, że $x_{r-j}=F_{2j}/F_{2j+1}$ dla $j=0,1,\ldots,r$ i dowodzimy słuszności tego przypuszczenia przez łatwą indukcję. Dla $j=r$ otrzymujemy

$$x_0=\frac{F_{2r}}{F_{2r+1}}=\frac{F_k}{F_m}\,. \tag{1}$$

Wykażemy teraz, że $m=k+1$ oraz że k jest liczbą parzystą. (Nietrudno wykazać, że nawet $k=2r$.) Gdyby zachodziła nierówność $m\geqslant k+2$, mielibyśmy

$$\frac{F_m}{F_k}-1\geqslant\frac{F_{k+2}}{F_k}-1=\frac{F_{k+1}}{F_k}\geqslant 1>\frac{F_{2r-1}}{F_{2r}}=\frac{F_{2r+1}}{F_{2r}}-1\,,$$

wbrew równości (1). Zatem $m=k+1$, czyli $x_0=F_k/F_{k+1}$. Gdy wyraz początkowy x_0 ma tę postać, z rekurencyjnej definicji ciągu (x_n), otrzymujemy przez łatwą indukcję wzór

$$x_n=\frac{F_{k-2n}}{F_{k+1-2n}}\qquad\text{dla}\quad n\leqslant\frac{k}{2}\,. \tag{2}$$

Przypuśćmy, że k jest liczbą nieparzystą i przyjmijmy $\ell=(k-1)/2$. Wówczas, na mocy wzoru (2), $x_n<1$ dla $n<\ell$ oraz $x_\ell=F_1/F_2=1/2$, skąd $x_{\ell+1}=0$,

$x_{\ell+2} = -1$ i wszystkie dalsze wyrazy są ujemne. W ciągu (x_n) nie występuje więc liczba 1, wbrew temu, że $x_r = 1$. Liczba k musi więc być parzysta.

Wykazaliśmy zatem, że jeśli w rozważanym ciągu występuje liczba 1, to para (k, m) jest postaci $(2r, 2r+1)$ dla pewnej liczby całkowitej $r \geqslant 0$.

Na odwrót: jeśli $k = 2r$, $m = 2r+1$, gdzie r jest dowolną liczbą całkowitą nieujemną, to $x_0 = F_k/F_{k+1}$, skąd na mocy wzoru (2) widzimy, że ciąg (x_n) zawiera wyraz $x_r = F_0/F_1 = 1$.

* * * * *

3. Oznaczmy przez π i π' płaszczyzny zawierające odpowiednio punkty A, B, C, D, E oraz A', B', C', D', E'. Ponadto niech K, L, M, N, O będą punktami przecięcia przekątnych czworokątów $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EAA'E'$ (odpowiednio).

Załóżmy najpierw, że płaszczyzny π i π' są równoległe. Wówczas stosunek odległości tych płaszczyzn od każdego z punktów K, L, M, N, O jest taki sam. Punkty te leżą więc na jednej płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzn π i π'.

Załóżmy teraz, że płaszczyzny π i π' nie są równoległe. Oznaczmy przez ℓ ich wspólną prostą. Niech σ będzie płaszczyzną zawierającą prostą ℓ i przechodzącą przez punkt K. Ponieważ punkty A, C, A', C' są współpłaszczyznowe, więc proste AC i $A'C'$ są albo równoległe, albo przecinają się w punkcie X należącym do prostej ℓ.

W pierwszym przypadku, zarówno prosta KL (część wspólna płaszczyzn $AB'C$, $A'BC'$) jak i prosta ℓ (część wspólna płaszczyzn ABC, $A'B'C'$) są równoległe do prostych AC i $A'C'$. Proste KL i ℓ są więc równoległe.

W drugim przypadku, punkty K, L, X należą do obu płaszczyzn $AB'C$ i $A'BC'$. Stąd wnioskujemy, że punkty te leżą na jednej prostej, czyli proste KL i ℓ mają punkt wspólny. Zatem w obu przypadkach punkt L należy do płaszczyzny σ.

Rozważając płaszczyzny $BC'D$, $B'CD'$ oraz korzystając z tego, że $L \in \sigma$, poprzez rozumowanie analogiczne do powyższego dowodzimy, że punkt M leży na płaszczyźnie σ. Wnioskując tak jak wyżej jeszcze dwukrotnie dostajemy, że punkty N, O również leżą na płaszczyźnie σ. Zatem punkty K, L, M, N, O leżą na płaszczyźnie σ, co kończy dowód.

(*mek, wp*)

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia pierwszego i drugiego, zadania z poprzednich olimpiad matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `http://www.impan.gov.pl/~olimp/`

XLIX Olimpiada Matematyczna
Szkice rozwiązań zadań z zawodów trzeciego stopnia

4. W ciągu (a_n) są wyrazy podzielne przez 7 (na przykład $a_5 = 7$). Przypuśćmy, że jest ich skończenie wiele; niech a_k będzie ostatnim z tych wyrazów. Oznaczmy: $a_k = x$, $a_{2k-1} = y$, $a_{4k-3} = z$; liczba x dzieli się przez 7, a liczby y i z — nie. Zachodzą równości:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= a_{2k-1} + a_k &&= x + y\,, & a_{2k+1} &= a_{2k} + a_k &&= 2x + y\,,\\ a_{4k-2} &= a_{4k-3} + a_{2k-1} &&= y + z\,, & a_{4k-1} &= a_{4k-2} + a_{2k-1} &&= 2y + z\,,\\ a_{4k} &= a_{4k-1} + a_{2k} &&= x + 3y + z\,, & a_{4k+1} &= a_{4k} + a_{2k} &&= 2x + 4y + z\,,\\ a_{4k+2} &= a_{4k+1} + a_{2k+1} &&= 4x + 5y + z\,, & a_{4k+3} &= a_{4k+2} + a_{2k+1} &&= 6x + 6y + z\,. \end{aligned}$$

Przy dzieleniu przez 7 liczby $a_{4k-3}, a_{4k-2}, \ldots, a_{4k+3}$ dają więc takie same reszty jak liczby z, $z+y$, ... , $z+6y$. Ponieważ y nie dzieli się przez 7, wszystkie te reszty są różne. Zatem jedna z tych siedmiu liczb jest podzielna przez 7, wbrew przypuszczeniu, że a_k jest ostatnim takim wyrazem. Sprzeczność kończy dowód.

* * * * *

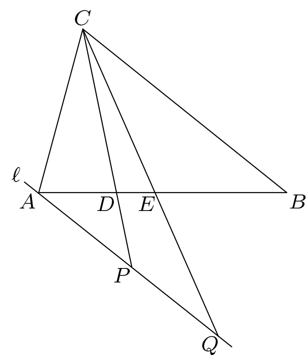
5. Oznaczmy przez ℓ prostą przechodzącą przez punkt A i równoległą do BC. Proste CD i CE przecinają prostą ℓ odpowiednio w punktach P i Q.

Z warunków danych w zadaniu otrzymujemy

$$\left(\frac{AC}{CB}\right)^2 = \frac{AD}{DB}\cdot\frac{AE}{EB} = \frac{AP}{CB}\cdot\frac{AQ}{CB}\,,$$

skąd

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AQ}\,.$$



Ponieważ $\sphericalangle CAP = \sphericalangle QAC$, więc z powyższej równości wynika, że trójkąty CAP i QAC są podobne. Zatem

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACP = \sphericalangle AQC = \sphericalangle BCE\,.$$

* * * * *

6. Odpowiedź: nie można.

Przypuśćmy, że da się uzyskać konfigurację z dokładnie jednym polem P_1, na którym jest napisana liczba -1. Z uwagi na standardowe symetrie szachownicy S można założyć, że pole P_1 ma środek $(a-\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})$, gdzie $a \geqslant b \geqslant 1$ (a, b — liczby całkowite). Punkt (a, b) jest wierzchołkiem pola P_1, więc $a^2 + b^2 \leqslant 1998^2$.

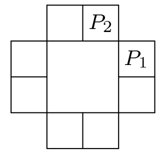
Wykażemy, że kwadrat jednostkowy P_2 o środku $(a-\frac{3}{2}, b+\frac{1}{2})$ także jest polem szachownicy S.

Jeżeli $a > b$, to $(a-1)^2+(b+1)^2 \leqslant a^2+b^2 \leqslant 1998^2$. Jeśli zaś $a = b$, to nierówność $a^2 + b^2 = 2a^2 \leqslant 1998^2$ na pewno nie jest równością; stąd wynika, że

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 = 2a^2 + 2 \leqslant 1998^2.$$

Zatem punkt $(a-1, b+1)$, czyli prawy górny wierzchołek kwadratu P_2, należy do koła, o którym mowa w zadaniu. W konsekwencji cały kwadrat P_2 zawiera się w tym kole, czyli jest polem szachownicy S.

Rozważmy teraz osiem kwadratów jednostkowych, z których dwa są polami P_1 i P_2, ułożonych tak jak na rysunku obok. Ponieważ kwadraty P_1 i P_2 są polami szachownicy S, więc pozostałe sześć kwadratów również.



Zauważmy, że każdy rząd pionowy, poziomy lub ukośny zawiera albo dokładnie dwa spośród ośmiu danych pól, albo nie zawiera żadnego z nich. Iloczyn liczb napisanych na tych ośmiu polach nie ulega wobec tego zmianie w wyniku wykonywanych operacji i stale jest równy 1. Nie jest więc możliwe, by w pewnym momencie na polu P_1 znalazła się liczba -1, a na pozostałych $+1$.

(*mek, wp*)

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia pierwszego i drugiego, zadania z poprzednich olimpiad matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `http://www.impan.gov.pl/~olimp/`