XLIX Olimpiada Matematyczna
Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

Zadania na dzień 24 kwietnia 1998 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Znaleźć wszystkie układy liczb całkowitych (a,b,c,x,y,z) spełniające układ równań
$$\begin{cases} a+b+c=xyz \\ x+y+z=abc \end{cases}$$
oraz warunki $a \geq b \geq c \geq 1$, $x \geq y \geq z \geq 1$.

2. Ciąg Fibonacciego (F_n) jest dany wzorami:
$$F_0 = F_1 = 1\,, \qquad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \text{dla} \;\; n=0,1,2,\ldots\;.$$
Wyznaczyć wszystkie pary (k,m) liczb całkowitych $m > k \geq 0$, dla których w ciągu (x_n) określonym wzorami
$$x_0 = \frac{F_k}{F_m}\,, \qquad x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{2x_n - 1}{1 - x_n} & \text{gdy } x_n \neq 1, \\ 1 & \text{gdy } x_n = 1 \end{cases} \qquad (n=0,1,2,3,\ldots)$$
występuje liczba 1.

3. Pięciokąt wypukły $ABCDE$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDES$. Płaszczyzna przecina krawędzie SA, SB, SC, SD, SE odpowiednio w punktach A', B', C', D', E' (różnych od wierzchołków ostrosłupa). Udowodnić, że punkty przecięcia przekątnych czworokątów $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EAA'E'$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Zadania na dzień 25 kwietnia 1998 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Dowieść, że w ciągu (a_n) określonym wzorami
$$a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{[n/2]} \quad \text{dla} \;\; n = 2,3,4,\ldots$$
występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 7.
Uwaga: $[n/2]$ jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $n/2$.

5. Punkty D i E leżą na boku AB trójkąta ABC i spełniają warunek
$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2 .$$
Udowodnić, że $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$.

6. Rozważamy na płaszczyźnie kwadraty jednostkowe, których wierzchołki mają obie współrzędne całkowite. Niech S będzie szachownicą, której polami są wszystkie kwadraty jednostkowe zawarte w kole określonym nierównością $x^2 + y^2 \leq 1998^2$. Na wszystkich polach szachownicy piszemy liczbę $+1$. Wykonujemy ciąg operacji. Każda z nich polega na wybraniu dowolnego rzędu poziomego, pionowego lub ukośnego i zmianie znaków wszystkich liczb napisanych na polach wybranego rzędu. (Rząd ukośny tworzą wszystkie pola szachownicy S, których środki leżą na pewnej prostej przecinającej osie układu współrzędnych pod kątem 45°.)

Rozstrzygnąć, czy w ten sposób można doprowadzić do sytuacji, w której na jednym polu będzie napisana liczba -1, a na pozostałych $+1$.