XLIX Olimpiada Matematyczna
Szkice rozwiązań zadań z zawodów drugiego stopnia

1. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieją funkcje o wymaganych własnościach. Oto przykład:

$$f(k) = \begin{cases} n-k & \text{dla } k < n, \\ n & \text{dla } k = n, \end{cases} \qquad g(k) = n+1-k\,.$$

2. Niech prosta równoległa do AB i przechodząca przez punkt C przecina odcinek BD w punkcie E. Oznaczmy przez N środek odcinka CE. Wówczas punkty M, N, D są współliniowe. Trójkąt BCE jest prostokątny, więc N jest środkiem okręgu opisanego na nim. Stąd wynika, że trójkąt BCN jest równoramienny, co daje następujące równości:

$$\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCN = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBN = \sphericalangle ABN\,.$$

Czworokąt $ABNC$ jest więc trapezem równoramiennym, nie będącym równoległobokiem. Zatem punkt N jest obrazem punktu C w symetrii względem symetralnej odcinka AB. To oznacza, że $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMN = \sphericalangle BMD$.

3. (a) Oznaczmy $A = ace+bdf$, $B = abc+bcd+cde+def+efa+fab$. Korzystając z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$A+B = (a+d)(b+e)(c+f) \leqslant \left(\frac{(a+d)+(b+e)+(c+f)}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}\,.$$

Stąd $B \leqslant \frac{1}{27} - A \leqslant \frac{1}{27} - \frac{1}{108} = \frac{1}{36}$.

(b) Takie liczby istnieją. Aby dane w zadaniu nierówności stały się równościami potrzeba i wystarcza, aby

$$A+B = \tfrac{1}{27}\,, \qquad A = \tfrac{1}{108}\,.$$

Pierwsza z powyższych równości zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $a+d$, $b+e$, $c+f$ są równe $\frac{1}{3}$. Obliczając $b = \frac{1}{3} - e$, $d = \frac{1}{3} - a$, $f = \frac{1}{3} - c$ i podstawiając te wartości do drugiej równości otrzymujemy

$$ace + (\tfrac{1}{3}-e)(\tfrac{1}{3}-a)(\tfrac{1}{3}-c) = \tfrac{1}{108}\,.$$

Stąd dane nierówności stają się równościami wtedy i tylko wtedy, gdy

$$ac+ce+ae+\tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{3}(a+c+e)\,, \qquad \text{gdzie} \quad 0 < a,c,e < \tfrac{1}{3}\,.$$

Pozostaje znaleźć takie liczby a, c, żeby po wyznaczeniu z powyższej równości liczby e — a następnie liczb b, d, f — otrzymać sześć różnych liczb dodatnich. Rozwiązań jest dużo, oto przykład jednego z nich:

$$a = \tfrac{1}{4}\,, \quad b = \tfrac{1}{5}\,, \quad c = \tfrac{2}{9}\,, \quad d = \tfrac{1}{12}\,, \quad e = \tfrac{2}{15}\,, \quad f = \tfrac{1}{9}\,.$$

(*mek, wp*)

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia pierwszego, zadania z poprzednich olimpiad matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `http://www.impan.gov.pl/~olimp/`

XLIX Olimpiada Matematyczna
Szkice rozwiązań zadań z zawodów drugiego stopnia

4. Przyjmijmy, że liczby całkowite x, y spełniają zadane równanie i że $y \neq 0$; wówczas także $x \neq 0$. Liczba x jest jednym z pierwiastków trójmianu kwadratowego $t^2 - 1998t + 3y^2$; niech z będzie drugim pierwiastkiem. Ze wzorów $x + z = 1998$, $xz = 3y^2$ wynika, że z też jest liczbą całkowitą oraz że $x, z > 0$. Oznaczmy największy wspólny dzielnik liczb x, z przez d; tak więc $x = ud$, $z = wd$,

$$(1) \qquad (u+w)d = 1998 = 2{\cdot}3^3{\cdot}37\,, \qquad uwd^2 = 3y^2\,.$$

Liczby u, w są względnie pierwsze, więc z drugiego wzoru widać, że

$$(2) \qquad u = 3a^2\,,\ w = b^2 \qquad \text{lub} \qquad w = 3a^2\,,\ u = b^2$$

dla pewnych liczb naturalnych a, b, przy czym b nie dzieli się przez 3. Z pierwszego wzoru (1) wnosimy teraz, że d dzieli się przez 3^3. Przyjmijmy $d = 3^3c$. Dostajemy równanie $(3a^2 + b^2)c = 2{\cdot}37$. Czynnik $(3a^2 + b^2)$, jako większy od 3, musi być równy 37 lub $2{\cdot}37$. Druga możliwość łatwo prowadzi do sprzeczności. Zatem $c = 2$ (czyli $d = 54$) i mamy równanie $3a^2 + b^2 = 37$, z jednym rozwiązaniem w liczbach naturalnych $a = 2$, $b = 5$. Wracając do alternatywy (2) stwierdzamy, że $u = 12$ lub $u = 25$, wobec czego

$$x = 12 \cdot 54 = 648 \qquad \text{lub} \qquad x = 25 \cdot 54 = 1350\,.$$

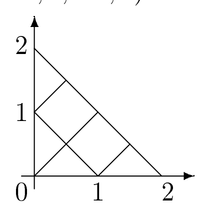
Drugi wzór (1) daje w obu przypadkach wartości $y = \pm 540$.

Pozostał przypadek, gdy $y = 0$; wtedy $x = 0$ lub $x = 1998$. Następujące pary (x, y) stanowią zatem pełne rozwiązanie równania: $(0,0)$, $(1998,0)$, $(648,540)$, $(648,-540)$, $(1350,540)$, $(1350,-540)$.

* * * * *

5. Zaznaczmy w układzie współrzędnych punkty $P_i = (a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$.

Z warunków zadania wynika, że punkty te leżą wewnątrz lub na obwodzie trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Podzielmy ten trójkąt na sześć obszarów: dwa kwadraty i cztery trójkąty prostokątne, jak na rysunku. Punktów jest siedem, więc pewne dwa z nich — na przykład P_k i P_m — leżą w tym samym obszarze $\mathcal{O}$ danego podziału.



Jeśli obszarem $\mathcal{O}$ jest kwadrat, to przez $Q = (u, w)$ oznaczmy jego środek; jeśli zaś obszarem $\mathcal{O}$ jest trójkąt prostokątny, to niech $Q = (u, w)$ będzie środkiem jego przeciwprostokątnej. W obu przypadkach $|x - u| + |y - w| \leqslant \frac{1}{2}$ dla punktów (x, y) należących do obszaru $\mathcal{O}$. W szczególności

$$|a_k - u| + |b_k - w| \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \text{oraz} \qquad |a_m - u| + |b_m - w| \leqslant \tfrac{1}{2}\,.$$

Stąd dostajemy

$$
\begin{aligned}
|a_k - a_m| + |b_k - b_m| &= |(a_k - u) + (u - a_m)| + |(b_k - w) + (w - b_m)| \leqslant \\
&\leqslant |a_k - u| + |u - a_m| + |b_k - w| + |w - b_m| = \\
&= (|a_k - u| + |b_k - w|) + (|a_m - u| + |b_m - w|) \leqslant \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1\,.
\end{aligned}
$$

* * * * *

6. Oznaczmy przez k prostą prostopadłą do płaszczyzny trójkąta ABC i przechodzącą przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Analogicznie, przez ℓ oznaczmy prostą prostopadłą do płaszczyzny trójkąta ABD i przechodzącą przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABD. Proste k, ℓ przecinają się w przestrzeni (w środku sfery opisanej na czworościanie $ABCD$) oraz obie są prostopadłe do krawędzi AB. Zatem płaszczyzna π, zawierająca proste k i ℓ jest prostopadła do krawędzi AB czworościanu $ABCD$.

Załóżmy najpierw, że istnieje taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$. Wówczas punkt P leży na prostej ℓ, punkt Q leży na prostej k. Prosta PQ leży w płaszczyźnie π, co oznacza, że jest ona prostopadła do krawędzi AB. A ponieważ $CD \parallel PQ$, więc $CD \perp AB$.

Załóżmy teraz, że krawędzie AB i CD są prostopadłe. Wtedy prosta CD jest równoległa do płaszczyzny π. Przesuwając prostą k o wektor $\overrightarrow{CD}$ otrzymamy prostą k' leżącą także w płaszczyźnie π (i nie równoległą do ℓ). Istnieje więc punkt wspólny prostych k' i ℓ, który oznaczymy przez P. Niech Q będzie obrazem punktu P w translacji o wektor $\overrightarrow{DC}$. Wówczas punkt Q leży na prostej k. Punkt P leży na prostej ℓ. Czworokąt $CDPQ$ jest równoległobokiem, w którym $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.

(*mek, wp*)

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia pierwszego, zadania z poprzednich olimpiad matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: `http://www.impan.gov.pl/~olimp/`