Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Zwardoń, 10 – 24 czerwca 2007

(wydanie drugie, nieco poprawione i uzupełnione)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Zwardoń, 10 – 24 czerwca 2007

Dom wczasowy „Zgoda”, Zwardoń 45A
34-373 ZWARDOŃ
tel. 0-33-8646-328

Kadra:

- Jerzy Bednarczuk
- Krzysztof Dorobisz – kierownik naukowy
- Kamil Duszenko
- Michał Pilipczuk
- Waldemar Pompe
- Urszula Swianiewicz
- Jarosław Wróblewski

Olimpiada Matematyczna w Internecie:
`www.om.edu.pl`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 10 – 24 czerwca 2007 r. w Zwardoniu, w pensjonacie „Zgoda”. Kadrę obozu stanowili: Jerzy Bednarczuk, Krzysztof Dorobisz – kierownik naukowy, Kamil Duszenko, Michał Pilipczuk, Waldemar Pompe, Urszula Swianiewicz i Jarosław Wróblewski.

W dniach 11, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 21 i 22 czerwca uczestnicy obozu rozwiązywali zadania indywidualnie, dnia 19 czerwca odbyły się zawody drużynowe, a 16 i 23 czerwca rozegrane zostały „mecze matematyczne” (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to: 151 punktów, 133 punkty i 117 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie.

Dla uczestników obozu zorganizowane zostały dwie wycieczki: 17 czerwca piesza wycieczka na Wielką Raczę, a 19 czerwca wycieczka pociągiem do Žiliny na Słowacji.

Po obozie, w dniach 24 – 27 czerwca 2007 r., w Bilovcu w Czechach odbyły się VII Czesko–Polsko–Słowackie Zawody Matematyczne.

W Zawodach Czesko–Polsko–Słowackich uczestniczyli uczniowie, którzy weszli w skład delegacji tych krajów na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną. Przewodniczącym delegacji polskiej był Marcin Pilipczuk, zastępcą przewodniczącego był Jarosław Wróblewski.

W ciągu dwóch dni każdy z zawodników rozwiązywał po 3 zadania, mając na to po 4,5 godziny.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu, szkice ich rozwiązań, oraz zadania z VII Czesko–Polsko–Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami.

Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych Olimpiady Matematycznej znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

Zad.	l. prac na 6 p.	l. prac na 5 p.	l. prac na 2 p.	l. prac na 0 p.
1.	8	-	1	11
2.	9	7	1	3
3.	8	2	-	10
4.	15	2	1	2
5.	7	7	1	5
6.	8	-	-	12
7.	1	-	-	19
8.	14	2	1	3
9.	10	2	1	7
10.	2	4	-	14
11.	4	1	-	15
12.	11	-	1	8
13.	9	2	1	8
14.	4	-	-	16
15.	-	-	1	19
16.	2	-	2	16
17.	1	-	-	19
18.	9	2	-	9

Zad.	l. prac na 6 p.	l. prac na 5 p.	l. prac na 2 p.	l. prac na 0 p.
19.	8	7	1	4
20.	-	1	1	18
21.	1	1	-	18
22.	15	-	-	5
23.	11	1	1	7
24.	4	2	1	13
25.	12	3	-	5
26.	16	-	-	4
27.	3	1	2	14
28.	3	-	4	13
29.	14	-	-	6
30.	13	3	3	1
31.	15	3	-	2
32.	1	1	2	16
33.	-	1	-	19
34.	7	1	-	12
35.	3	7	-	10
36.	5	-	2	13

Uwaga: Każda praca była oceniana w skali 0, 2, 5, 6 punktów.

Treści zadań

Zawody indywidualne:

1. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć najmniejszą wartość, jaką może przyjąć suma cyfr dodatniej wielokrotności liczby $10^k - 1$.

2. Dany jest $(2n)$-kąt wypukły $A_1A_2\ldots A_{2n}$ wpisany w okrąg o. Punkt P, różny od punktów A_1, A_2, ..., A_{2n}, leży na okręgu o. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_{2n-1}, p_{2n}$ oznaczają odległości punktu P odpowiednio od prostych A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{2n-1}A_{2n}$, $A_{2n}A_1$. Dowieść, że

$$p_1p_3\ldots p_{2n-1} = p_2p_4\ldots p_{2n}.$$

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geqslant \frac{3}{1+abc}.$$

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n > 1$, dla których liczby

$$\binom{n}{1},\quad \binom{n}{2},\quad \ldots,\quad \binom{n}{n-1}$$

mają wspólny dzielnik całkowity większy od 1.

5. Niektóre pola tablicy $n \times n$ pomalowano na zielono. Każde pole, które nie jest zielone, ma wspólny bok z zielonym polem. Ponadto dowolne dwa zielone pola można połączyć takim ciągiem zielonych pól, że każde dwa sąsiednie pola w tym ciągu mają wspólny bok.

Dowieść, że liczba zielonych pól jest nie mniejsza od $\dfrac{n^2-2}{3}$.

6. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest nierówność

$$n\sqrt{7}\{n\sqrt{7}\} > \frac{3}{2}$$

(gdzie symbol $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej x).

7. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ o polu s. Pola trójkątów EAB, ABC, BCD, CDE, DEA są odpowiednio równe a, b, c, d, e. Wykazać, że

$$s^2 - s(a+b+c+d+e) + (ab+bc+cd+de+ea) = 0.$$

8. Dowieść, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest różnicą dwóch wielomianów rosnących.

9. Wyznaczyć największą liczbę dodatnią k o następującej własności: Jeżeli liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówność

$$kabc > a^3 + b^3 + c^3,$$

to są one długościami boków trójkąta.

10. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Punkt P jest takim punktem leżącym wewnątrz tego czworokąta, że pola trójkątów BCP i DAP są równe. Udowodnić, że środki odcinków AB, CD i EP leżą na jednej prostej.

11. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnych liczb całkowitych $a > b > 0$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich n, że liczba $a^n + b^n$ jest podzielna przez n.

12. Wyznaczyć najmniejszą liczbę pól, jakie należy pomalować na czerwono w tablicy o wymiarach 2007×2007, tak aby w każdym kwadracie 4×4 złożonym z pól tablicy co najmniej połowa pól była czerwona.

13. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $abc = 1$. Wykazać, że

$$\frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} \leqslant a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

14. Niech $p(n)$ oznacza największy dzielnik pierwszy liczby całkowitej $n > 1$. Dowieść, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n > 1$ zachodzą nierówności

$$p(n) < p(n+1) < p(n+2).$$

15. Dane są liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n. Udowodnić, że można każdą z tych liczb pomalować na czerwono albo na zielono w taki sposób, że każda trójka (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) dla $i = 1, 2, \ldots, n-2$ zawiera liczby obu kolorów oraz suma S liczb czerwonych spełnia nierówność

$$|S| \geqslant \frac{1}{6}(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|).$$

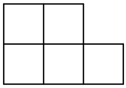
16. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony zbiór kół na płaszczyźnie o parami rozłącznych wnętrzach, że każde z danych kół jest styczne do dokładnie 5 spośród pozostałych kół.

17. Rozstrzygnąć, czy równanie

$$x^2+5=y^3$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y.

18. Rozpatrujemy następujące figury złożone z pięciu kwadratów jednostkowych: takie jak na poniższym rysunku



oraz figury otrzymane z powyższej przez obroty (ale nie przez odbicia symetryczne).

Rozstrzygnąć, czy można wypełnić takimi figurami kwadrat rozmiaru 44×44 z usuniętym jednostkowym kwadratem narożnym.

19. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E. Punkt P leży wewnątrz tego trapezu, przy czym

$$\sphericalangle APD=\sphericalangle BPC=90^\circ.$$

Wykazać, że punkty P i E leżą na prostej prostopadłej do podstaw danego trapezu.

20. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n\geqslant 1$ wielomian

$$W(x)=(x^2+1^2)(x^2+2^2)(x^2+3^2)\ldots(x^2+n^2)+1$$

nie jest iloczynem wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

21. Dany jest taki sześciokąt wypukły $ABCDEF$, że pola trójkątów ACE i BDF są równe. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków danego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

22. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a_1, a_2, $\ldots$, a_n spełniona jest nierówność

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2}+\ldots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2}\geqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{3}.$$

23. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba

$$n^4+n^3+n^2+n+1$$

ma co najmniej 2007 różnych dzielników pierwszych.

24. Dana jest nieskończona rodzina zbiorów 3-elementowych. Udowodnić, że jeżeli każde dwa z tych zbiorów mają niepustą część wspólną, to istnieje taki zbiór 2-elementowy, który ma niepustą część wspólną z każdym zbiorem z tej rodziny.

25. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek
$$ab+bc+ca \leqslant 3abc.$$
Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność
$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a+b+c.$$

26. Dana jest tablica rozmiaru $2n\times 2n$, w której $3n$ pól pomalowano na czarno. Wykazać, że można tak wybrać n kolumn oraz n wierszy, by każde czarne pole znalazło się w pewnym wybranym wierszu lub w pewnej wybranej kolumnie.

27. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Punkty P i Q są odpowiednio środkami tych łuków BC i CA okręgu o, które nie zawierają odpowiednio punktów A i B. Okrąg s jest styczny wewnętrznie do okręgu o oraz jest styczny do odcinków BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt R jest takim punktem, że czworokąt $PCQR$ jest równoległobokiem. Wykazać, że punkty D, E, R leżą na jednej prostej.

28. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: Jeżeli względnie pierwsze dodatnie liczby całkowite a i b są dzielnikami liczby n, to również liczba $a+b-1$ jest dzielnikiem liczby n.

29. W trójkącie ABC kąt $\sphericalangle ABC$ jest rozwarty. Punkt F leży na boku AC, przy czym
$$AF=BF \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle FBC=90^\circ.$$
Punkty D i E są odpowiednio środkami boków AB i BC. Prosta przechodząca przez punkt F i równoległa do boku AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że
$$\sphericalangle GCB=\sphericalangle ACD.$$

30. Wyrazy ciągu a_1, a_2, $\ldots$ są liczbami całkowitymi dodatnimi i każda liczba całkowita dodatnia występuje w tym ciągu dokładnie jeden raz. Ponadto
$$a_{n+1}\in\{a_n-1, 4a_n-1\} \qquad \text{dla } n=1,2,3,\ldots.$$
Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrazu a_{2007}.

31. Dane są liczby całkowite a_1, b_1, c_1, d_1. Niech ponadto
$$a_{i+1}=|a_i-b_i|, \quad b_{i+1}=|b_i-c_i|, \quad c_{i+1}=|c_i-d_i|, \quad d_{i+1}=|d_i-a_i|$$
dla $i=1,2,3,\ldots$. Wykazać, że istnieje taki wskaźnik k, że
$$a_k=b_k=c_k=d_k=0.$$

32. Dane są takie niezerowe liczby całkowite a, b, c, że $a+b+c=0$. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest podzielność

$$a^2+b^2+c^2 \mid a^{n^2+1}+b^{n^2+1}+c^{n^2+1}.$$

33. Dany jest skończony podzbiór A zbioru liczb pierwszych oraz liczba całkowita dodatnia a. Wykazać, że istnieje tylko skończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich m, że wszystkie dzielniki pierwsze liczby a^m-1 należą do zbioru A.

34. Rozważamy wszystkie takie pary liczb rzeczywistych (a,b), że wielomian

$$P(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx+1$$

ma pierwiastek rzeczywisty. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość sumy a^2+b^2.

35. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu i nie jest jego średnicą. Cięciwa AC tego okręgu przechodzi przez środek odcinka OB. Proste OC i AB przecinają się w punkcie P, zaś proste OA i BC przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że $PC=AQ$.

36. W pewnym państwie jest n miast. Między każdymi dwoma z nich istnieje dokładnie jedno z następujących połączeń: kolejowe, autobusowe lub lotnicze. Wykazać, że istnieje taki środek komunikacji oraz co najmniej $\frac{n}{2}$ takich miast, by za pomocą tego środka można było odbyć podróż (niekoniecznie bezpośrednią) między dowolnymi dwoma z nich.

Zawody drużynowe:

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie E. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABE, BCE, CDE, DAE. Wykazać, że jeśli w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, to na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.

2. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek

$$x+y+z+xyz=4.$$

Dowieść, że zachodzi nierówność

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+z).$$

3. W n-osobowym stowarzyszeniu (gdzie $n>20$) działają komisje. W skład każdej komisji wchodzi 20 osób. Ponadto dla każdej pary członków stowarzyszenia istnieje dokładnie jedna komisja, do której należą obaj członkowie. Wyznaczyć najmniejszą wartość n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie d, dla których istnieje taki wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, że liczba d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb

$$a_n = W(n) + 3^n \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Pierwszy Mecz Matematyczny:

1. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę pierwszą p, że liczba

$$2^{120!} - 1$$

jest podzielna przez p i nie jest podzielna przez p^2.

2. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 1$, że liczba

$$n! + 8$$

jest podzielna przez $2n+1$.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{a^3 + 7abc} + \sqrt[3]{b^3 + 7abc} + \sqrt[3]{c^3 + 7abc} \leqslant 2(a+b+c).$$

4. Dane są: liczba całkowita $n \geqslant 2$ i liczba rzeczywista a. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x_1, x_2, ..., x_n układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = a^n \end{cases}$$

5. Dane są różne liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n $(n \geqslant 2)$. Określamy wielomian W wzorem

$$W(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Niech $W_i(x)$ będzie ilorazem z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x - x_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Dowieść, że

$$\frac{x_1^n}{W_1(x_1)} + \frac{x_2^n}{W_2(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^n}{W_n(x_n)} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

6. Dana jest prostokątna tabela $m \times n$ (gdzie $m, n \geqslant 3$). W każdej kratce brzegowej (tzn. mającej wspólny bok z brzegiem tabeli) napisana jest liczba rzeczywista. Dowieść, że istnieje co najwyżej jeden taki sposób wpisania liczb rzeczywistych do pozostałych kratek, że liczba w dowolnej niebrzegowej kratce jest średnią arytmetyczną liczb znajdujących się w czterech sąsiednich kratkach.

7. Różne liczby całkowite dodatnie c_1, c_2, …, c_n spełniają warunek
$$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\ldots+\frac{1}{c_n}\geqslant 2.$$
Dowieść, że istnieją dwa różne niepuste zbiory A, $B\subseteq\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$, dla których $\sum\limits_{x\in A}x=\sum\limits_{y\in B}y$.

8. Dany jest kąt wypukły o wierzchołku R. Punkty A i B leżą na różnych ramionach, zaś punkt C leży wewnątrz tego kąta. Posługując się jedynie linijką skonstruować takie punkty P i Q leżące odpowiednio na ramionach RB i RA danego kąta, że punkt C leży na odcinku PQ oraz odcinki AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

9. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP=CR$.

10. Różne punkty M, S, T leżą na okręgu o środku w punkcie O. Styczne do tego okręgu w punktach S i T przecinają się w punkcie A. Punkt P jest punktem przecięcia prostej AM i prostej prostopadłej do prostej MO przechodzącej przez punkt S. Dowieść, że punkt symetryczny do punktu S względem punktu P leży na prostej MT.

11. W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności
$$\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{[ABD]}{[ABC]}=\lambda.$$
Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości λ.

Drugi Mecz Matematyczny:

1. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniają warunek
$$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2.$$
Udowodnić, że liczba $a+b+c+d$ jest złożona.

2. Dane są liczby całkowite a_1, a_2, a_3, …, a_{1000} niepodzielne przez 7, 11 ani 13. Dowieść, że można tak dobrać znaki w wyrażeniu
$$\pm a_1\pm a_2\pm a_3\pm\ldots\pm a_{1000}\,,$$
aby w wyniku otrzymać liczbę podzielną przez 1001.

3. Liczby dodatnie x_1, x_2, …, x_n spełniają warunek

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}.$$

Dowieść, że

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\ldots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1.$$

4. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $p=4n+1$ jest liczbą pierwszą. Udowodnić, że

$$\left[\sqrt{p}\,\right]+\left[\sqrt{2p}\,\right]+\ldots+\left[\sqrt{np}\,\right]=\frac{p^2-1}{12}$$

(gdzie symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x).

5. Dane są liczby rzeczywiste $a<b$, $0<p<q<1$. Dowieść, że istnieje taki wielomian W o współczynnikach całkowitych, że

$$W(x)\in\langle a;b\rangle \qquad \text{dla każdego } x\in\langle p;q\rangle.$$

6. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieją takie liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, b$ oraz takie liczby całkowite $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n+1}$ nie mniejsze od $2n$, że

$$\mathrm{NWD}(a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_{n+1},\, b)=1$$

oraz

$$a_1^{k_1}+a_2^{k_2}+a_3^{k_3}+\ldots+a_{n+1}^{k_{n+1}}=b^{2n}\,.$$

7. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $abc=1$. Wykazać, że

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}\geqslant\sqrt{2}.$$

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje na płaszczyźnie zbiór 2007 punktów białych leżących na okręgu oraz 2007 punktów czarnych takich, że każda prosta przechodząca przez dwa punkty białe przechodzi również przez pewien punkt czarny.

9. Okrąg o środku S jest dopisany do czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym prosta AC przecina ten okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E i prostopadła do prostej AC przecina proste BS i DS odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że $EP=EQ$.

10. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Punkty P i Q są odpowiednio punktami przecięcia wysokości trójkątów ADE i BCE. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AB i CD. Wykazać, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do prostej MN.

11. W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCD \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABD.$$

Dowieść, że $AB = CD$.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne:

1. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach rzeczywistych spełniające dla każdej liczby rzeczywistej x zależność

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2).$$

2. Niech $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n (ciąg Fibonacciego). Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej m istnieje taka liczba k, że liczba $a_k^4 - a_k - 2$ jest podzielna przez m.

3. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg k. Półproste DA i CB przecinają się w takim punkcie E, że $CD^2 = AD \cdot ED$. Oznaczmy przez F ($F \neq A$) punkt przecięcia okręgu k z prostą przechodzącą przez punkt A i prostopadłą do prostej ED. Dowieść, że odcinki AD i CF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABE leży na prostej ED.

4. Dla każdej liczby rzeczywistej $p \geqslant 1$ rozpatrujemy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których

$$p < x < \left(2 + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right)^2.$$

Dowieść, że z tego zbioru można wybrać takie cztery różne liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, że $ab = cd$.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby n należące do zbioru

$$\{3900, 3901, 3902, 3903, 3904, 3905, 3906, 3907, 3908, 3909\},$$

dla których zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ można rozbić na rozłączne podzbiory trzyelementowe w taki sposób, aby w każdym uzyskanym podzbiorze suma pewnych dwóch liczb była równa trzeciej liczbie z tego podzbioru.

6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Okrąg przechodzący przez punkty A i D jest styczny zewnętrznie do okręgu przechodzącego przez punkty B i C w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta. Załóżmy, że $|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle PDC| \leqslant 90^\circ$ oraz $|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCD| \leqslant 90^\circ$. Dowieść, że $|AB| + |CD| \geqslant |BC| + |AD|$.

Rozwiązania

Zawody indywidualne:

1. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć najmniejszą wartość, jaką może przyjąć suma cyfr dodatniej wielokrotności liczby 10^k-1.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $9k$.

Suma cyfr liczby 10^k-1 jest oczywiście równa $9k$. Wystarczy więc udowodnić, że założenie istnienia wielokrotności liczby 10^k-1 o mniejszej sumie cyfr prowadzi do sprzeczności.

Niech więc n będzie najmniejszą dodatnią wielokrotnością liczby 10^k-1 o sumie cyfr mniejszej niż $9k$. Wówczas $n>10^k$ i liczba n nie jest podzielna przez 10. Ponadto zapis dziesiętny liczby n nie może rozpoczynać się k cyframi 9, gdyż w przeciwnym razie suma cyfr liczby n przekraczałaby $9k$. Niech m będzie największą liczbą postaci $(10^k-1)10^l$ (gdzie $l \geqslant 0$), która jest mniejsza od n. Liczba $n-m$ jest dodatnia, mniejsza od n i podzielna przez 10^k-1. Rozpatrzmy pisemne odejmowanie $n-m$:

$$\begin{array}{rccccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & a_{k+3} & a_{k+4} \ \ldots \\ - & & 9 & 9 & \ldots & 9 & 9 & 0 & 0 & 0 \ \ldots \\ \hline \end{array}$$

Widzimy, że różnica między sumami cyfr liczb n oraz $n-m$ jest taka sama jak różnica między sumami cyfr liczb $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_ka_{k+1}}$ oraz $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_ka_{k+1}}-\overline{99\ldots 99}$. Ta ostatnia liczba powstaje jednak przez zwiększenie o jeden liczby, której kolejnymi cyframi są a_1-1, a_2, a_3, $\ldots$, a_k, a_{k+1}. Wobec tego suma cyfr tej liczby nie może przekraczać $(a_1-1)+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}+1$, czyli — sumy cyfr liczby $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_ka_{k+1}}$. W takim razie suma cyfr liczby $n-m$ nie przekracza sumy cyfr n, co wszakże przeczy określeniu liczby n. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

2. Dany jest $(2n)$-kąt wypukły $A_1A_2\ldots A_{2n}$ wpisany w okrąg o. Punkt P, różny od punktów A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n}, leży na okręgu o. Niech p_1, p_2, $\ldots$, p_{2n-1}, p_{2n} oznaczają odległości punktu P odpowiednio od prostych A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{2n-1}A_{2n}$, $A_{2n}A_1$. Dowieść, że

$$p_1p_3\ldots p_{2n-1} = p_2p_4\ldots p_{2n}.$$

Rozwiązanie

Sposób I

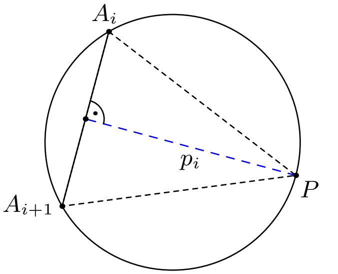
Rozpatrzmy trójkąt PA_iA_{i+1} (gdzie $i \in \{1,2,\ldots,2n\}$ oraz $A_{2n+1}=A_1$). Ponieważ p_i jest odległością punktu P od prostej A_iA_{i+1} (zob. rys. 1), więc pole tego trójkąta wynosi

$$[PA_iA_{i+1}] = \frac{1}{2}A_iA_{i+1}\cdot p_i. \qquad (1)$$

Z drugiej strony, korzystając ze wzoru wyrażającego pole trójkąta przez długości jego boków i promień okręgu opisanego otrzymujemy

$$[PA_iA_{i+1}] = \frac{1}{4R} PA_i \cdot PA_{i+1} \cdot A_iA_{i+1}, \tag{2}$$

gdzie R jest promieniem danego w treści zadania okręgu.



rys. 1

Porównując zależności (1) i (2) widzimy, że

$$p_i = \frac{PA_i \cdot PA_{i+1}}{2R} \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, 2n,$$

skąd natychmiast wynika żądana równość

$$p_1p_3 \ldots p_{2n-1} = \frac{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3 \ldots \cdot PA_{2n-1} \cdot PA_{2n}}{(2R)^n} = p_2p_4 \ldots p_{2n}.$$

Sposób II

Udowodnimy najpierw tezę zadania dla czworokąta.

Niech więc będzie dany czworokąt wypukły $A_1A_2A_3A_4$ wpisany w okrąg o oraz niech punkt P różny od wierzchołków czworokąta leży na okręgu o. Oznaczmy przez B_1, B_2, B_3, B_4 rzuty prostokątne punktu P odpowiednio na proste A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1. Bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że punkt P leży na łuku A_1A_2 okręgu o (zob. rys. 2).

Proste PB_1 i PB_2 są prostopadłe odpowiednio do prostych A_1A_2 i A_2A_3, przy czym punkt P nie należy do kąta wypukłego $A_1A_2A_3$. Wynika stąd równość kątów

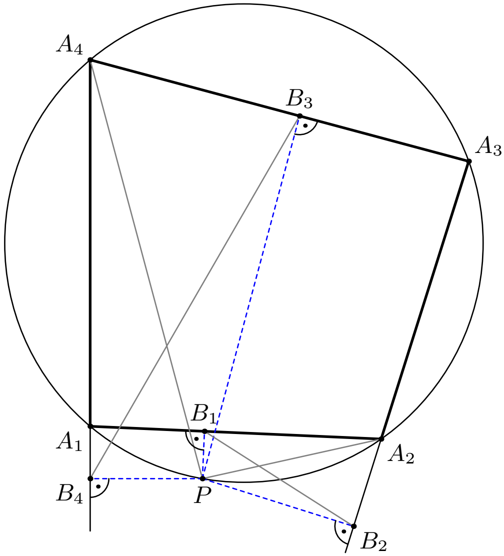
$$\sphericalangle B_1PB_2 = \sphericalangle A_1A_2A_3. \tag{3}$$

Analogicznie proste PB_3 i PB_4 są prostopadłe odpowiednio do prostych A_3A_4, A_4A_1, jednak w tym przypadku punkt P należy do kąta wypukłego $A_3A_4A_1$, więc otrzymujemy równość

$$\sphericalangle B_3PB_4 = 180^\circ - \sphericalangle A_3A_4A_1. \tag{4}$$

Czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ jest wpisany w okrąg, więc prawe strony wypisanych wyżej zależności (3) i (4) są równe. Wobec tego

$$\sphericalangle B_1PB_2 = \sphericalangle B_3PB_4. \tag{5}$$



rys. 2

Dalej, zauważmy, że punkty P, B_1, A_2, B_2 leżą na jednym okręgu o średnicy PA_2, zaś punkty P, B_3, A_4, B_4 leżą na jednym okręgu o średnicy PA_4. Ponieważ ponadto punkt P leży na okręgu o, więc korzystając wielokrotnie z równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku dostajemy

$$\measuredangle PB_2B_1 = \measuredangle PA_2B_1 = \measuredangle PA_2A_1 = \measuredangle PA_4A_1 = \measuredangle PA_4B_4 = \measuredangle PB_3P_4.$$

Łącząc uzyskaną wyżej równość kątów $\measuredangle PB_2B_1 = \measuredangle PB_3B_4$ z równością (5) wnioskujemy, że trójkąty B_1PB_2 i B_4PB_3 są podobne. To daje równość stosunków

$$\frac{PB_1}{PB_2} = \frac{PB_4}{PB_3},$$

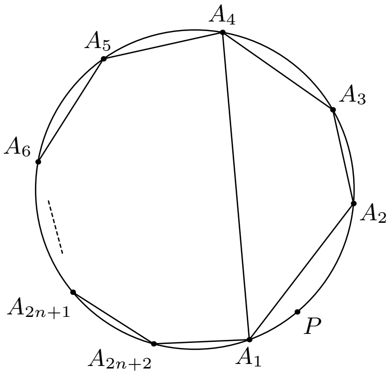
z której wynika zależność $PB_1 \cdot PB_3 = PB_2 \cdot PB_4$, czyli teza zadania dla czworokąta.

Przechodzimy teraz do przypadku ogólnego, w którym będziemy rozumować indukcyjnie. Przypuśćmy, że dla dowolnego $(2n)$-kąta spełniającego założenia zadania teza jest prawdziwa i rozpatrzmy $(2n+2)$-kąt wypukły $A_1A_2\ldots A_{2n+1}A_{2n+2}$ wpisany w okrąg o. Zaznaczając przekątną A_1A_4 dzielimy ten $(2n+2)$-kąt na czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ oraz $(2n)$-kąt $A_1A_4A_5\ldots A_{2n+1}A_{2n+2}$ (zob. rys. 3) i oba te wielokąty spełniają tezę zadania. Zatem jeżeli przez p_1, p_2, $\ldots$, p_{2n+1}, p_{2n+2} oznaczymy odległości punktu P odpowiednio od prostych A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{2n+1}A_{2n+2}$, $A_{2n+2}A_1$, zaś przez d — odległość punktu P od prostej A_1A_4, to na mocy zbadanego przypadku czworokąta mamy

$$p_1p_3 = p_2d, \tag{6}$$

natomiast założenie indukcyjne pozwala napisać

$$dp_5p_7\ldots p_{2n-1}p_{2n+1}=p_4p_6p_8\ldots p_{2n}p_{2n+2}. \tag{7}$$



rys. 3

Wystarczy teraz pomnożyć równości (6) i (7) stronami oraz podzielić obustronnie przez d i indukcja będzie zakończona. Zatem teza jest prawdziwa w ogólności.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geqslant\frac{3}{1+abc}.$$

Rozwiązanie

Daną do udowodnienia nierówność przekształcamy równoważnie do postaci

$$\frac{1+abc}{a(1+b)}+\frac{1+abc}{b(1+c)}+\frac{1+abc}{c(1+a)}\geqslant 3,$$

$$\frac{1+abc+a(1+b)}{a(1+b)}+\frac{1+abc+b(1+c)}{b(1+c)}+\frac{1+abc+c(1+a)}{c(1+a)}\geqslant 6,$$

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{1+b}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{c(1+a)}{1+c}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\geqslant 6,$$

ale lewa strona powyższej nierówności jest sumą 6 składników, których iloczyn wynosi 1, zatem wystarczy zastosować nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n>1$, dla których liczby

$$\binom{n}{1},\quad\binom{n}{2},\quad\ldots,\quad\binom{n}{n-1}$$

mają wspólny dzielnik całkowity większy od 1.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Potęgi liczb pierwszych.

Udowodnimy najpierw, że dla liczb postaci $n=p^k$, gdzie p jest liczbą pierwszą oraz $k\geqslant 1$, każdy z danych w treści zadania współczynników dwumianowych jest podzielny przez p. Rzeczywiście, dla $m=1,2,\ldots,n-1$ napiszmy

$$(1)\qquad \binom{n}{m}=\binom{p^k}{m}=\frac{p^k}{m}\cdot\frac{p^k-1}{1}\cdot\frac{p^k-2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{p^k-(m-1)}{m-1}.$$

Liczby 1, 2, ..., $m-1$, m nie są podzielne przez p^k. Wobec tego ułamki

$$\frac{p^k-i}{i}\qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,m-1$$

zapisane w postaci nieskracalnej mają liczniki i mianowniki niepodzielne przez p, zaś ułamek $\dfrac{p^k}{m}$ zapisany w postaci nieskracalnej ma licznik podzielny przez p. Zatem na podstawie wzoru (1) liczba $\dbinom{n}{m}$ jest podzielna przez p.

Przypuśćmy teraz, że n nie jest potęgą liczby pierwszej. Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby n. Napiszmy $n=p^k\cdot r$, gdzie $k\geqslant 1$ i $r>1$ jest liczbą niepodzielną przez p. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie widzimy, że liczba

$$\binom{n}{p^k}=\binom{p^kr}{p^k}=r\cdot\frac{p^kr-1}{1}\cdot\frac{p^kr-2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{p^kr-(p^k-1)}{p^k-1}$$

nie jest podzielna przez p. Zatem współczynniki dwumianowe wypisane w treści zadania nie mogą mieć wspólnego dzielnika pierwszego będącego jednocześnie dzielnikiem liczby $n=\dbinom{n}{1}$. Wynika stąd, że liczba n nie spełnia warunków zadania.

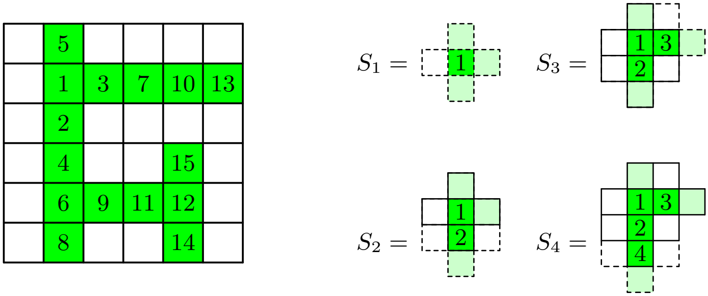
5. Niektóre pola tablicy $n\times n$ pomalowano na zielono. Każde pole, które nie jest zielone, ma wspólny bok z zielonym polem. Ponadto dowolne dwa zielone pola można połączyć takim ciągiem zielonych pól, że każde dwa sąsiednie pola w tym ciągu mają wspólny bok.

Dowieść, że liczba zielonych pól jest nie mniejsza od $\dfrac{n^2-2}{3}$.

Rozwiązanie

Niech k oznacza liczbę zielonych pól. Ponumerujmy wszystkie zielone pola liczbami 1, 2, ..., k w taki sposób, by każde zielone pole (oprócz pola o numerze 1) miało wspólny bok z zielonym polem o mniejszym numerze. Na mocy warunków zadania taki sposób ponumerowania jest możliwy: jeżeli użyliśmy już numerów 1, 2, ..., i, to wybieramy dowolne nieponumerowane jeszcze zielone pole i łączymy je ciągiem pól z polem o numerze 1; w ciągu tym wystąpią dwa zielone pola mające wspólny bok, z których dokładnie jedno nie jest jeszcze ponumerowane, i temu właśnie polu nadajemy numer $i+1$.

Dla $i=1,2,\ldots,k$ niech S_i oznacza zbiór pól zielonych o numerze nie przekraczającym i oraz pól mających wspólny bok z takim zielonym polem (zob. rys. 4).



rys. 4

Zbiór S_1 składa się wówczas z zielonego pola o numerze 1 oraz z co najwyżej czterech pól mających z nim wspólny bok. Zatem $|S_1| \leqslant 5$. Dla $i=2,3,\ldots,k$ zielone pole o numerze i należy do zbioru S_{i-1} (gdyż ma bok wspólny z pewnym zielonym polem o numerze $j<i$), co oznacza, że zbiór $S_i \setminus S_{i-1}$ zawiera najwyżej trzy pola (pola mające jeden wspólny bok z zielonym polem o numerze i, różne od zielonego pola j). Tak więc $|S_i \setminus S_{i-1}| \leqslant 3$. Przez prostą indukcję otrzymujemy stąd nierówność

$$|S_i| \leqslant 3i+2 \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,k.$$

Z drugiej strony, każde z n^2 pól tablicy jest zielone lub ma wspólny bok z zielonym polem. Stąd wniosek, że $|S_k|=n^2$. Zatem $3k+2 \geqslant n^2$, co implikuje tezę.

6. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest nierówność

$$n\sqrt{7}\{n\sqrt{7}\} > \frac{3}{2}$$

(gdzie symbol $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej x).

Rozwiązanie

Niech k będzie częścią całkowitą liczby $n\sqrt{7}$. Z niewymierności liczby $\sqrt{7}$ wynika, że $n\sqrt{7}>k$. Zatem liczba

$$n\sqrt{7}-k = \frac{7n^2-k^2}{n\sqrt{7}+k}$$

jest dodatnia. Wobec tego $7n^2-k^2>0$. Ponadto kwadraty liczb całkowitych mogą dawać reszty 0, 1, 2, 4 z dzielenia przez 7, więc liczba $7n^2-k^2$ jest różna od 1 i 2. Stąd otrzymujemy

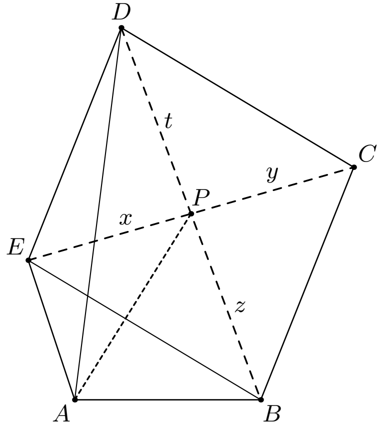
$$n\sqrt{7}\{n\sqrt{7}\} = n\sqrt{7}(n\sqrt{7}-k) = n\sqrt{7}\cdot\frac{7n^2-k^2}{n\sqrt{7}+k} \geqslant \frac{3n\sqrt{7}}{n\sqrt{7}+k} > \frac{3n\sqrt{7}}{n\sqrt{7}+n\sqrt{7}} = \frac{3}{2}.$$

7. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ o polu s. Pola trójkątów EAB, ABC, BCD, CDE, DEA są odpowiednio równe a, b, c, d, e. Wykazać, że

$$s^2 - s(a+b+c+d+e) + (ab+bc+cd+de+ea) = 0.$$

Rozwiązanie

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych BD i CE. Oznaczmy ponadto $x=EP$, $y=PC$, $t=DP$, $z=PB$ (zob. rys. 5).



rys. 5

Wierzchołki E, P, C trójkątów ABE, ABP, ABC leżą na jednej prostej, zatem otrzymujemy

$$(1) \qquad [ABP] = \frac{x}{x+y}[ABC] + \frac{y}{x+y}[ABE] = \frac{x}{x+y}b + \frac{y}{x+y}a.$$

Rozpatrując trójkąty BDE i BDC widzimy, że

$$\frac{x}{y} = \frac{[BDE]}{[BDC]} = \frac{[ABCDE]-[EAB]-[BCD]}{[BDC]} = \frac{s-a-c}{c},$$

skąd obliczamy

$$\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+\frac{y}{x}} = \frac{1}{1+\frac{c}{s-a-c}} = \frac{s-a-c}{s-a}, \qquad \frac{y}{x+y} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}} = \frac{1}{1+\frac{s-a-c}{c}} = \frac{c}{s-a}.$$

Łącząc powyższe równości z zależnością (1) otrzymujemy

$$(2) \qquad [ABP] = \frac{(s-a-c)b+ca}{s-a}.$$

Z drugiej strony, badając trójkąty ABP i ABD stwierdzamy, że

$$[ABP] = \frac{z}{z+t}[ABD] = \frac{z}{z+t}([ABCDE]-[DEA]-[BCD]) = \frac{z}{z+t}(s-e-c),$$

a ponieważ

$$\frac{t}{z}=\frac{[EDC]}{[EBC]}=\frac{d}{s-a-d} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{z}{z+t}=\frac{1}{1+\frac{t}{z}}=\frac{1}{1+\frac{d}{s-a-d}}=\frac{s-a-d}{s-a},$$

więc uzyskujemy związek

$$[ABP]=\frac{(s-e-c)(s-a-d)}{s-a}. \tag{3}$$

Na mocy (2) i (3) dostajemy równość

$$(s-a-c)b+ca=(s-e-c)(s-a-d),$$

co po przekształceniu daje

$$\begin{aligned}0&=(s-e-c)(s-a-d)-(s-a-c)b-ca=\\ &=s^2-(a+d+e+c)s+(e+c)(a+d)-bs+(ab+bc-ca)=\\ &=s^2-(a+b+c+d+e)s+(ea+ca+de+cd+ab+bc-ca)=\\ &=s^2-(a+b+c+d+e)s+(ab+bc+cd+de+ea),\end{aligned}$$

czyli tezę zadania.

8. Dowieść, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest różnicą dwóch wielomianów rosnących.

Rozwiązanie

Sposób I

Nazwijmy *dobrym* wielomian, który jest różnicą dwóch wielomianów rosnących. Jest jasne, że suma dwóch wielomianów dobrych jest wielomianem dobrym oraz iloczyn wielomianu dobrego przez dowolną stałą rzeczywistą jest wielomianem dobrym. Wobec tego wystarczy udowodnić, że jednomiany 1, x, x^2, x^3, $\ldots$ są dobre, ale to wynika z przedstawień

$$\begin{aligned}1&=(x+1)-x,\\ x^{2k-1}&=2x^{2k-1}-x^{2k-1},\\ x^{2k}&=(x^{4k-1}+x^{2k}+2kx)-(x^{4k-1}+2kx).\end{aligned}$$

Uzasadnienia wymaga jedynie poprawność ostatniego przedstawienia. Otóż wielomian $x^{4k-1}+2kx$ jest oczywiście rosnący jako suma wielomianów rosnących, natomiast dla wielomianu $W(x)=x^{4k-1}+x^{2k}+2kx$ obliczamy

$$\begin{aligned}W(b)-W(a)&=(b-a)\Big(\sum_{i=0}^{4k-2}a^ib^{4k-2-i}+\sum_{i=0}^{2k-1}a^ib^{2k-1-i}+2k\Big)=\\ &=(b-a)\Big(\sum_{i=0}^{2k-1}[(a^ib^{2k-1-i})^2+(a^ib^{2k-1-i})+1]+ab\sum_{i=0}^{2k-2}(a^ib^{2k-2-i})^2\Big).\end{aligned}$$

Z nierówności $t^2+t+1>0$ wynika, że drugi czynnik jest dodatni, gdy liczby a, b są tego samego znaku lub jedna z nich jest zerem. Wobec tego $W(a)<W(b)$ zachodzi dla $a<b\leqslant 0$ oraz dla $0\leqslant a<b$, a to pozwala wnioskować, że wielomian W jest rosnący.

Sposób II

Ponieważ wielomian jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy jego pochodna jest wielomianem przyjmującym tylko wartości nieujemne, więc teza zadania sprowadza się do udowodnienia, że dowolny wielomian $W(x)$ mozna przedstawić w postaci

$$W(x)=F(x)-G(x),$$

gdzie $F(x)\geqslant 0$, $G(x)\geqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Jednak z nierówności $t^2+t+1>0$, $t^2-t+1>0$ wynika, że wystarczy przyjąć

$$F(x)=\frac{(W(x))^2+W(x)+1}{2}, \qquad G(x)=\frac{(W(x))^2-W(x)+1}{2}.$$

9. Wyznaczyć największą liczbę dodatnią k o następującej własności: Jeżeli liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówność

$$kabc>a^3+b^3+c^3,$$

to są one długościami boków trójkąta.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $k=5$.

Liczby $k>5$ nie spełniają warunków zadania: istotnie, przyjmując $a=b=1$, $c=2$, widzimy, że dana w treści zadania nierówność przybiera postać $2k>10$ i jest spełniona, a liczby 1, 1, 2 nie są długościami boków trójkąta.

Przypuśćmy teraz, że $5abc>a^3+b^3+c^3$ i liczby dodatnie a, b, c nie są długościami boków trójkąta. Możemy oczywiście bez ograniczenia ogólności rozumowania przyjąć, że $a\leqslant b\leqslant c$. Zatem $c\geqslant a+b$. Rozwiązanie możemy teraz dokończyć na dwa sposoby:

Sposób I

Z zależności $c\geqslant a+b$ wynika, że $c=a+b+t$ dla pewnej liczby $t\geqslant 0$. Przeprowadzając rachunek widzimy, że

$$\begin{aligned}0>a^3+b^3+c^3-5abc=t^3+3(a+b)t^2+(3a^2+ab+3b^2)t+2(a^3+b^3-a^2b-ab^2)\geqslant\\ \geqslant 2(a^3+b^3-a^2b-ab^2)=2(a+b)(a-b)^2,\end{aligned}$$

i otrzymaliśmy sprzeczność.

Sposób II

Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$a^3+b^3+\frac{1}{8}c^3\geqslant 3\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot \frac{1}{8}c^3}=\frac{3}{2}abc, \tag{1}$$

natomiast założenie $c \geqslant a+b$ oraz nierówność $(x+y)^2 \geqslant 4xy$ dają

$$\frac{7}{8}c^3 \geqslant \frac{7}{8}c(a+b)^2 \geqslant \frac{7}{8}c \cdot 4ab = \frac{7}{2}abc. \tag{2}$$

Dodając stronami (1) i (2) mamy $a^3+b^3+c^3 \geqslant 5abc$ i ponownie sprzeczność.

Liczba $k=5$ ma więc żądaną własność.

10. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Punkt P jest takim punktem leżącym wewnątrz tego czworokąta, że pola trójkątów BCP i DAP są równe. Udowodnić, że środki odcinków AB, CD i EP leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

Zbiór punktów X leżących wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, dla których zachodzi równość

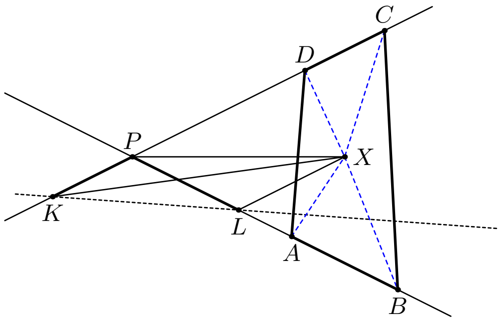
$$[ABX]-[CDX]=a,$$

gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest zawarty w pewnej prostej.

Dowód lematu.

Jeżeli proste AB i CD są równoległe, to teza lematu jest prawdziwa, gdyż różnica pól $[ABX]-[CDX]$ zależy tylko od odległości punktu X od prostej AB, przy czym dla różnych odległości otrzymuje się różne różnice.

Niech więc proste AB i CD przecinają się punkcie P. Wybierzmy punkty K, L jak pokazano na rys. 6, tak aby zachodziły równości $PL=AB$ oraz $PK=CD$.



rys. 6

Wówczas otrzymujemy równości pól

$$[ABX]=[PLX] \qquad \text{oraz} \qquad [CDX]=[KPX].$$

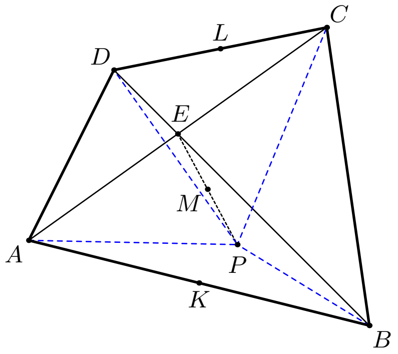
Ponadto różnica $[PLX]-[KPX]$ jest równa $[KLX]-[PKL]$, jeżeli odcinki PL i KX przecinają się, oraz jest równa $-[KLX]-[PKL]$ w przeciwnym przypadku. Wynika stąd, że różnica

$$[ABX]-[CDX]=\pm[KLX]-[PKL]$$

zależy tylko od odległości punktu X od prostej KL i dla różnych odległości otrzymuje się różne wartości tej różnicy. Wobec tego zbiór szukanych punktów X jest zawarty w pewnej prostej równoległej do prostej KL.

Przechodzimy teraz do rozwiązania zadania.

Niech K, L, M będą odpowiednio środkami odcinków AB, CD, EP (zob. rys. 7).



rys. 7

Punkt M jest środkiem odcinka EP, więc mamy

$$[ADM]=\frac{1}{2}[ADE]+\frac{1}{2}[ADP], \qquad [BCM]=\frac{1}{2}[BCE]+\frac{1}{2}[BCP],$$

czyli z uwagi na równość $[ADP]=[BCP]$ możemy napisać

$$[ADM]-[BCM]=\frac{1}{2}([ADE]-[BCE]).$$

Ponadto

$$[ADK]-[BCK]=\frac{1}{2}([ABD]-[ABC])=\frac{1}{2}([ADE]-[BCE]),$$

$$[ADL]-[BCL]=\frac{1}{2}([ACD]-[BCD])=\frac{1}{2}([ADE]-[BCE]).$$

W takim razie zachodzą równości

$$[ADM]-[BCM]=[ADK]-[BCK]=[ADL]-[BCL],$$

które wraz z lematem pozwalają wnioskować, że punkty K, L, M leżą na jednej prostej.

11. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnych liczb całkowitych $a>b>0$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich n, że liczba a^n+b^n jest podzielna przez n.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Tak.

Sposób I

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Liczba $a+b$ ma nieparzysty dzielnik pierwszy p.

Wykażemy, że każda z liczb $n=p^k$ dla $k=0,1,2,\ldots$ spełnia podzielność $n|a^n+b^n$. W tym celu udowodnimy przez indukcję, że

$$p^{k+1}|a^{p^k}+b^{p^k} \qquad \text{dla } k=0,1,2,\ldots.$$

Dla $k=0$ powyższa zależność wynika z określenia liczby p. Aby wykonać krok indukcyjny, piszemy

$$a^{p^{k+1}}+b^{p^{k+1}}=(a^{p^k}+b^{p^k})(a^{(p-1)p^k}-a^{(p-2)p^k}b^{p^k}+a^{p^k(p-3)}b^{2p^k}-\ldots+b^{(p-1)p^k})$$

i widzimy, że indukcja sprowadza się do udowodnienia podzielności drugiego czynnika przez p. Czynnik ten jest sumą p składników postaci $(-1)^i a^{(p-i)p^k}b^{ip^k}$ dla $i=0,1,\ldots,p-1$, wystarczy więc dowieść, że każdy z tych składników daje tę samą resztę z dzielenia przez p. Ponieważ jednak na podstawie określenia liczby p mamy $b\equiv -a \pmod p$, więc zachodzi

$$(-1)^i a^{(p-i)p^k}b^{ip^k}\equiv(-1)^i a^{(p-i)p^k}(-a)^{ip^k}=(-1)^{i(1+p^k)}a^{p^{k+1}}\equiv a^{p^{k+1}} \pmod p,$$

co kończy dowód indukcyjny.

2. Liczba $a+b$ jest potęgą dwójki.

Możliwe są dwie sytuacje: liczby a, b są albo obie parzyste, albo obie nieparzyste.

Jeżeli liczby a, b są parzyste, to wystarczy przyjąć $n=2^k$ dla $k=0,1,2,\ldots$. Rzeczywiście, liczby a^n, b^n są wówczas podzielne przez 2^{2^k}, więc suma a^n+b^n jest podzielna przez 2^{2^k} i tym bardziej przez 2^k.

Rozważmy z kolei przypadek, gdy liczby a, b są nieparzyste. Mamy wówczas $a^2+b^2\equiv 2 \pmod 4$; wobec założenia $a>b>0$ liczba a^2+b^2 jest większa od 2 i ma nieparzysty dzielnik pierwszy p. Rozumując tak jak w punkcie **1.** dowodzimy, że

$$p^{k+1}|a^{2p^k}+b^{2p^k} \qquad \text{dla } k=0,1,2,\ldots.$$

Ponadto liczba $a^{2p^k}+b^{2p^k}$ jest oczywiście parzysta, dzieli się więc przez $2p^k$. Każda z liczb postaci $n=2p^k$ ma więc żądaną własność, co kończy rozwiązanie.

Sposób II

Tu również rozpatrujemy dwa przypadki.

1. Liczba $a+b$ jest nieparzysta.

Przypuśćmy, że liczba całkowita dodatnia n spełnia podzielność $n|a^n+b^n$. Skonstruujemy większą liczbę m, dla której $m|a^m+b^m$. Zauważmy w tym celu, że liczba a^n+b^n jest większa od n, więc istnieje dzielnik pierwszy p liczby $\dfrac{a^n+b^n}{n}$. Mamy wtedy $pn|a^n+b^n$, a ponieważ liczba p jest nieparzysta, prawdziwa jest podzielność $a^n+b^n|a^{pn}+b^{pn}$. Wystarczy zatem przyjąć $m=pn$.

Rozpoczynając od wartości $n=1$ dostajemy w ten sposób indukcyjnie rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich spełniających tezę.

2. Liczba $a+b$ jest parzysta.

Jeżeli obie liczby a, b są parzyste, to oczywiście każda z liczb postaci $n=2^k$ dla $k=0,1,2,\ldots$ spełnia warunek $n|a^n+b^n$, gdyż wynika to z podzielności $2^k|2^{2^k}$, która jeset natychmiastową konsekwencją nierówności $2^k>k$.

Załóżmy z kolei, że liczby a i b są nieparzyste. Wówczas $a^2+b^2\equiv 2 \pmod 4$ oraz $a^2+b^2>2$, więc istnieje nieparzysty dzielnik pierwszy $p|a^2+b^2$. Dalej rozumujemy jak w punkcie **1.**: Rozpocznijmy od wartości $n=2$. Następnie przypuśćmy, że liczba parzysta n spełnia podzielność $n|a^n+b^n$. Wtedy liczby n oraz a^n+b^n są parzyste i niepodzielne przez 4, więc liczba $\dfrac{a^n+b^n}{n}$ ma nieparzysty dzielnik pierwszy p. Liczba $m=pn$ jest w tej sytuacji większa od n oraz również spełnia $m|a^m+b^m$.

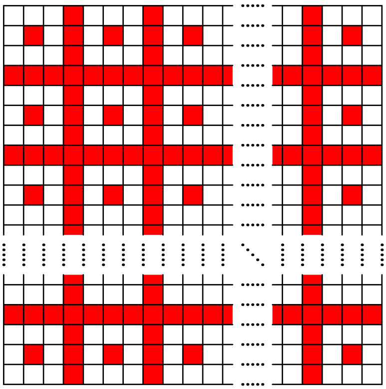
12. Wyznaczyć najmniejszą liczbę pól, jakie należy pomalować na czerwono w tablicy o wymiarach 2007×2007, tak aby w każdym kwadracie 4×4 złożonym z pól tablicy co najmniej połowa pól była czerwona.

Rozwiązanie

Odpowiedź: 2012017.

Udowodnimy ogólniej, że najmniejsza możliwa liczba pól w tablicy o wymiarach $(4k+3)\times(4k+3)$ dla $k\geqslant 1$ jest równa $8k^2+8k+1$.

Wskażemy najpierw pokolorowanie, w którym dokładnie $8k^2+8k+1$ pól jest czerwonych. Wprowadźmy w tabeli układ współrzednych, numerując kolumny i wiersze liczbami 1, 2, …, $4k+3$, i pomalujmy na czerwono te pola tabeli, których obie współrzędne są parzyste lub co najmniej jedna współrzędna jest podzielna przez 4 (zob. rys. 8). Jest widoczne, że każdy kwadrat 4×4 zawiera dokładnie 8 czerwonych pól (7 pól pochodzących z poziomych i pionowych linii oraz jedno „pojedyncze” czerwone pole).

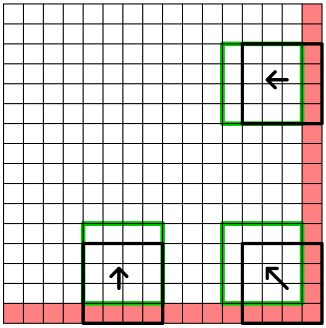


rys. 8

W takiej konfiguracji mamy k kolumn składających się z $4k+3$ czerwonych pól, $k+1$ kolumn składających się z $2k+1$ czerwonych pól oraz $2k+2$ kolumn składających się z k czerwonych pól. Zatem łączna liczba czerwonych pól wynosi

$$k(4k+3)+(k+1)(2k+1)+(2k+2)k=8k^2+8k+1.$$

Rozpatrzmy teraz dowolne pokolorowanie tablicy $(4k+3)\times(4k+3)$ spełniające warunki zadania, w którym jest m czerwonych pól. Rozszerzmy tę tablicę do tablicy $(4k+4)\times(4k+4)$ dodając wiersz i kolumnę o numerze $4k+4$. Dodaliśmy więc do tabeli $2(4k+4)-1=8k+7$ pól; pomalujmy wszystkie te pola na czerwono. Rozszerzona tabela zawiera więc $m+8k+7$ czerwonych pól.



rys. 9

Z drugiej strony, rozszerzona tabela również ma taką własność, że w dowolnym kwadracie 4×4 co najmniej połowa pól jest czerwona. Aby to udowodnić, zauważmy, że kwadrat 4×4, nie zawierający się w wyjściowej tabeli, możemy przesunąć o jeden wiersz do góry lub o jedną kolumnę w lewo, tak by zawierał się w wyjściowej tabeli (zob. rys. 9); kwadrat przesunięty z założenia zawiera co najmniej 8 pól czerwonych, więc ze względu na to, że wszystkie dodane pola są czerwone, kwadrat sprzed przesunięcia również musi zawierać co najmniej 8 pól czerwonych. Tablicę $(4k+4)\times(4k+4)$ można podzielić na $(k+1)^2$ parami rozłącznych kwadratów 4×4, z których każdy, jak udowodniliśmy, zawiera przynajmniej 8 czerwonych pól. Wobec tego w rozszerzonej tablicy jest co najmniej $8(k+1)^2$ czerwonych pól. Otrzymujemy zatem nierówność

$$m+8k+7\geqslant 8(k+1)^2=8k^2+16k+8,$$

skąd dostajemy $m\geqslant 8k^2+8k+1$.

13. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $abc=1$. Wykazać, że

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\leqslant a^3b+b^3c+c^3a.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Wystarczy udowodnić dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c nierówność

$$(abc)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\leqslant a^3b+b^3c+c^3a.$$

Przymując $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$ zapisujemy powyższą nierówność w postaci

(1) $$x^7y^4z+y^7z^4x+z^7x^4z\leqslant x^9y^3+y^9z^3+z^9x^3.$$

Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\underbrace{x^9y^3+\ldots+x^9y^3}_{16}+\underbrace{y^9z^3+\ldots+y^9x^3}_{4}+z^9x^3\geqslant 21((x^9y^3)^{16}(y^9z^3)^4z^9x^3)^{\frac{1}{21}}=21x^7y^4z.$$

Stąd i z dwóch analogicznych nierówności dostajemy

$$x^7y^4z\leqslant\frac{1}{21}(16x^9y^3+4y^9z^3+z^9x^3),$$
$$y^7z^4x\leqslant\frac{1}{21}(16y^9z^3+4z^9x^3+x^9y^3),$$
$$z^7x^4y\leqslant\frac{1}{21}(16z^9x^3+4x^9y^3+y^9z^3).$$

Sumując stronami otrzymujemy nierówność (1), czyli tezę zadania.

Sposób II

Z założenia $abc=1$ wynika, że dla pewnych liczb dodatnich x, y, z mamy

$$a=\frac{x}{y},\quad b=\frac{y}{z},\quad c=\frac{z}{x}$$

(możemy przyjąć np. $x=ab$, $y=b$, $z=1$). Daną w treści zadania nierówność możemy teraz przepisać w postaci

$$\frac{z}{x}\cdot\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\cdot\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z}\leqslant\frac{x^3}{y^3}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y^3}{z^3}\cdot\frac{z}{x}+\frac{z^3}{x^3}\cdot\frac{x}{y}$$

lub równoważnie

$$x^3+y^3+z^3\leqslant\frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x}.$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności dla ciągów jednomonotonicznych przeciwnie uporządkowanych. Mianowicie ciągi (x^4,y^4,z^4) oraz $(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$ są przeciwnie uporządkowane, więc

$$x^3+y^3+z^3=\begin{bmatrix}x^4 & y^4 & z^4\\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z}\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix}x^4 & y^4 & z^4\\ \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & \frac{1}{x}\end{bmatrix}=\frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x}.$$

14. Niech $p(n)$ oznacza największy dzielnik pierwszy liczby całkowitej $n>1$. Dowieść, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n>1$ zachodzą nierówności

$$p(n)<p(n+1)<p(n+2).$$

Rozwiązanie

Niech q będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Rozpatrzmy ciąg

$$q^2+1, \quad q^4+1, \quad q^8+1, \quad q^{16}+1, \quad \ldots$$

Wyrazy tego ciągu są parzyste i niepodzielne przez 4. Ponadto największy wspólny dzielnik dowolnych dwóch różnych wyrazów wynosi 2 (gdyż większy z nich daje resztę 2 z dzielenia przez mniejszy). Zatem istnieje najmniejsza taka liczba całkowita dodatnia k, że liczba $q^{2^k}+1$ ma dzielnik pierwszy większy od q. Przyjmijmy

$$n=q^{2^k}-1=(q-1)(q+1)(q^2+1)(q^4+1)\ldots(q^{2^{k-1}}+1),$$

Czynniki $q-1$ i $q+1$ w powyższym iloczynie nie mają dzielników pierwszych większych od q, zaś z określenia liczby k wynika, że to samo można powiedzieć o pozostałych czynnikach. Zatem $p(n)<q=p(q^{2^k})=p(n+1)$. Ponadto liczba $n+1=q^{2^k}+1$ ma dzielnik pierwszy większy od q, skąd $p(n+1)<p(n+2)$.

Dla różnych liczb pierwszych q otrzymujemy różne wartości $n+1=q^{2^k}$. Wobec tego liczb n spełniających warunki zadania istnieje nieskończenie wiele.

15. Dane są liczby rzeczywiste x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Udowodnić, że można każdą z tych liczb pomalować na czerwono albo na zielono w taki sposób, że każda trójka (x_i,x_{i+1},x_{i+2}) dla $i=1,2,\ldots,n-2$ zawiera liczby obu kolorów oraz suma S liczb czerwonych spełnia nierówność

$$|S|\geqslant\frac{1}{6}(|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|).$$

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$M=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$$

oraz

$$a_i = \text{suma tych liczb } x_j\ (j=1,2,\ldots,n), \text{ dla których } x_j\geqslant 0 \text{ oraz } j\equiv i \pmod 3,$$
$$b_i = \text{suma tych liczb } x_j\ (j=1,2,\ldots,n), \text{ dla których } x_j< 0 \text{ oraz } j\equiv i \pmod 3,$$

dla $i=1,2,3$. Zachodzi wówczas równość

$$2M=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_1)-(b_1+b_2)-(b_2+b_3)-(b_3+b_1).$$

Zatem co najmniej jeden z sześciu składników wypisanych w nawiasach ma wartość bezwzględną nie mniejszą niż $\frac{1}{3}M$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że

$$a_1+a_2\geqslant\frac{1}{3}M.$$

Możemy ponadto przyjąć, że

$$|a_1+a_2| \geqslant |b_1+b_2|$$

(w przeciwnym razie zmienimy znaki liczb x_1, x_2, ..., x_n, co nie wpłynie na prawdziwość tezy). Wobec tego mamy

$$(a_1+a_2+b_1)+(a_1+a_2+b_2)=a_1+a_2+[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)] \geqslant a_1+a_2 \geqslant \frac{1}{3}M.$$

Stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb $a_1+a_2+b_1$, $a_1+a_2+b_2$ jest równa co najmniej $\frac{1}{6}M$. Bez zmniejszenia ogólności rozumowania przyjmijmy, ze

$$a_1+a_2+b_1 \geqslant \frac{1}{6}M.$$

Pomalujmy teraz na czerwono te liczby x_k, dla których $k \equiv 1 \pmod 3$ oraz te liczby $x_k \geqslant 0$, dla których $k \equiv 2 \pmod 3$; pozostałe liczby pomalujmy na zielono. Wówczas każda trójka (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) dla $i=1,2,\ldots,n-2$ zawiera liczbę czerwoną i zieloną: istotnie, liczba x_j, której wskaźnik daje resztę 1 z dzielenia przez 3, jest czerwona, zaś liczba, której wskaźnik dzieli się przez 3, jest zielona. Ponadto suma liczb czerwonych jest równa $S=|S|=a_1+a_2+b_1 \geqslant \frac{1}{6}M$. Zatem warunki zadania są spełnione.

16. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony zbiór kół na płaszczyźnie o parami rozłącznych wnętrzach, że każde z danych kół jest styczne do dokładnie 5 spośród pozostałych kół.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Tak.

Rozpatrzmy dwunastościan foremny i sferę s styczną do wszystkich jego krawędzi (środkiem sfery s jest środek symetrii dwunastościanu, na sferze leżą zaś środki jego krawędzi). Wówczas przekrojem każdej ściany dwunastościanu ze sferą s jest okrąg wpisany w tę ścianę. Każda ściana jest pięciokątem foremnym, więc okrąg wpisany w ścianę jest styczny do 5 spośród pozostałych jedenastu okręgów. Dla każdego okręgu wypełnijmy mniejszą część sfery s ograniczoną przez ten okrąg (będziemy wypełnioną część uważać za „wnętrze” okręgu na sferze). Otrzymujemy więc układ 12 wypełnionych okręgów na sferze s, przy czym żadne dwa nie mają wspólnych punktów wewnętrznych i każdy wypełniony okrąg jest styczny do dokładnie 5 spośród pozostałych okręgów.

Rozważmy teraz rzut stereograficzny z pewnego punktu P tej sfery, który nie należy do żadnego wypełnionego okręgu, na pewną płaszczyznę π. Ponieważ rzut ten przeprowadza okręgi leżące na sferze s nie przechodzące przez punkt P na okręgi leżące na płaszczyźnie π, więc obrazem każdego z wypełnionych okręgów na sferze s będzie koło na płaszczyźnie π. W ten sposób otrzymujemy układ 12 kół na płaszczyźnie π, z których każde dwa mają rozłączne wnętrza i każde koło jest styczne do dokładnie 5 spośród pozostałych kół.

17. Rozstrzygnąć, czy równanie

$$x^2+5=y^3$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie.

Załóżmy nie wprost, że dane równanie ma rozwiązanie x, y.

Gdyby liczba x była nieparzysta, to $y^3=x^2+5\equiv 1+5\equiv 2 \pmod 4$, co nie jest możliwe. Zatem $4|x^2$, a więc $y^3\equiv 0+5\equiv 1 \pmod 4$, a to pociąga $y\equiv 1 \pmod 4$. Stąd

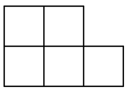
$$x=2k, \quad y=4l+1 \qquad \text{dla pewnych całkowitych } k,l.$$

Wykonujemy teraz następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned}(2k)^2+5&=(4l+1)^3,\\ 4k^2+5&=64l^3+48l^2+12l+1,\\ 4(k^2+1)&=4(16l^3+12l^2+3l),\\ k^2+1&=l(16l^2+12l+3).\end{aligned}$$

Ostatnia równość nie może mieć miejsca, gdyż liczba $16l^2+12l+3$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4, zatem posiada przynajmniej jeden dzielnik pierwszy postaci $4n+3$, natomiast liczba k^2+1 takich dzielników mieć nie może (w przeciwnym razie mielibyśmy kongruencje $k^2\equiv -1 \pmod{4n+3}$ i $k^{4n+2}\equiv(-1)^{2n+1}=-1 \pmod{4n+3}$, co jest sprzeczne z małym twierdzeniem Fermata).

18. Rozpatrujemy następujące figury złożone z pięciu kwadratów jednostkowych: takie jak na poniższym rysunku



oraz figury otrzymane z powyższej przez obroty (ale nie przez odbicia symetryczne).

Rozstrzygnąć, czy można wypełnić takimi figurami kwadrat rozmiaru 44×44 z usuniętym jednostkowym kwadratem narożnym.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie.

Kwadrat 44×44 podzielmy na kwadraty jednostkowe. W kwadrat jednostkowy znajdujący się na przecięciu k-tego wiersza i m-tej kolumny wpiszmy taką liczbę $r\in\{1,2,3,4,5\}$, że $2k+m\equiv r \pmod 5$. Wówczas dowolna figura opisana w treści zadania przykrywa pięć kwadratów jednostkowych, wśród których dokładnie raz występuje każda z liczb 1, 2, 3, 4, 5 (zob. rys. 10).

Gdyby można było wypełnić takimi figurami kwadrat 44×44 z usuniętym kwadratem narożnym, to każda z liczb 1, 2, 3, 4, 5 występowałaby tam tyle samo razy.

Wykażemy, że tak nie jest. Oczywiście bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że usuwamy kwadrat narożny znajdujący się w lewym górnym rogu.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	…
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	…
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	…
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	…
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	…
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	…
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

rys. 10

Każdy prostokąt 5×1 zawiera dokładnie jeden raz każdą z liczb 1, 2, 3, 4, 5. Ponadto kwadrat 44×44 możemy podzielić na prostokąty o wymiarach 4×4 (zawierający lewy górny róg), 40×4 (zawierający prawy górny róg) oraz 44×40. Dwa ostatnie prostokąty oczywiście można podzielić na prostokąty 5×1, więc każda z liczb 1, 2, 3, 4, 5 występuje w nich tyle samo razy. Pozostaje zauważyć, że w kwadracie 4×4 po usunięciu pola narożnego (zob. rys. 10) liczby 1, 2, 3, 4, 5 występują odpowiednio 2, 3, 4, 3, 3 razy. Wobec tego poszukiwane wypełnienie nie jest możliwe.

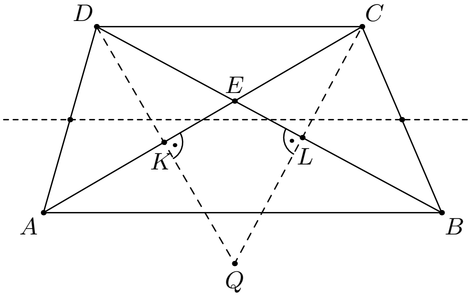
19. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E. Punkt P leży wewnątrz tego trapezu, przy czym

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC = 90^\circ.$$

Wykazać, że punkty P i E leżą na prostej prostopadłej do podstaw danego trapezu.

Rozwiązanie

Niech K i L będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów C i D na proste BD i AC. Niech ponadto proste DK i CL przecinają się w punkcie Q (zob. rys. 11).



rys. 11

Punkty D, K, L, C leżą na jednym okręgu o średnicy DC, więc zachodzi równość

(1) $$QK\cdot QD = QL\cdot QC.$$

Zauważmy, że punkt K leży na okręgu o_1 o średnicy DA, zaś punkt L leży na okręgu o_2 o średnicy BC. Wobec tego równość (1) oznacza, że punkt Q leży na osi potęgowej okręgów o_1 i o_2. Oznaczmy tę oś przez m.

Prosta m jest prostopadła do podstaw danego trapezu, gdyż środki okręgów o_1, o_2 wyznaczają prostą równoległą do podstaw. Ponadto z prostopadłości $DK \perp EC$, $CL \perp ED$ wynika, że Q jest punktem przecięcia wysokości trójkąta DEC. W związku z tym punkty E i Q leżą na prostej prostopadłej do CD, a zatem punkt E leży na prostej m.

Na koniec zauważmy, że punkt P wyznaczony przez warunek dany w treści zadania jest punktem przecięcia okręgów o_1, o_2, czyli leży na ich osi potęgowej m. Wobec tego m jest prostą, o której mowa w tezie zadania.

20. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ wielomian

$$W(x) = (x^2+1^2)(x^2+2^2)(x^2+3^2)\ldots(x^2+n^2)+1$$

nie jest iloczynem wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy wbrew tezie, że istnieje rozkład $W(x) = P_1(x)P_2(x)$. W szczególności wynika stąd, że $n \geqslant 2$. Bez ograniczenia ogólności możemy ponadto założyć, że wielomiany P_1, P_2 są unormowane.

Ustalmy wartość $k \in \{2,3,\ldots,n\}$ i podzielmy wielomiany $P_1(x)$, $P_2(x)$ z resztą przez wielomian x^2+k^2. Otrzymamy

$$P_1(x) = (x^2+k^2)G_1(x) + R_1(x), \qquad P_2(x) = (x^2+k^2)G_2(x) + R_2(x),$$

gdzie $R_1(x) = a_1x + b_1$, $R_2(x) = a_2x + b_2$, przy czym współczynniki a_1, b_1, a_2, b_2 są całkowite. Mamy wówczas

$$W(x) = (x^2+k^2)[(x^2+k^2)G_1(x)G_2(x) + G_1(x)R_1(x) + R_1(x)G_2(x)] + R_1(x)R_2(x).$$

Wielomian $W(x)-1$ jest podzielny przez x^2+k^2, zatem z powyższej równości wynika istnienie takiej liczby całkowitej c, że

$$R_1(x)R_2(x) = a_1a_2x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2 = c(x^2+k^2)+1 = cx^2 + (ck^2+1).$$

Widzimy, że $a_1b_2 = -a_2b_1$, zatem liczba $-c(ck^2+1) = -a_1a_2b_1b_2 = (a_1b_2)^2$ jest kwadratem, co wymusza $c = 0$, bo w przeciwnym razie lewa strona jest ujemna (jest to oczywiste dla $c > 0$, a gdyby $c < 0$ i $ck^2+1 \geqslant 0$, uzyskalibyśmy $c = -1$, $k = 1$, co przeczy wyborowi k). To dowodzi, że $R_1(x)R_2(x) \equiv 1$, co z kolei pociąga $R_1(x) \equiv R_2(x)$. Wobec tego

$$P_1(x) - P_2(x) = (x^2+k^2)(G_1(x) - G_2(x)).$$

Różnica $P_1(x) - P_2(x)$ dzieli się więc przez $H(x) = (x^2+2^2)\ldots(x^2+n^2)$.

Mamy $\deg H = 2n-2$, więc możemy przyjąć, że $\deg P_1 \geqslant 2n-2$. Ponieważ iloczyn $W(x) = P_1(x)P_2(x)$ jest wielomianem stopnia $2n$ nie mającym pierwiastków rzeczywistych, musi zachodzić $\deg P_1 = 2n-2$, $\deg P_2 = 2$. Skutkiem tego $\deg(P_1 - P_2) = 2n-2$

oraz $P_1(x)=bH(x)+P_2(x)$ dla pewnej liczby rzeczywistej b, co prowadzi do

$$W(x)=(x^2+1)H(x)+1=P_1(x)P_2(x)=bH(x)P_2(x)+(P_2(x))^2$$

i w konsekwencji

$$(x^2+1-bP_2(x))H(x)=(P_2(x))^2-1=(P_2(x)+1)(P_2(x)-1).$$

Dla dowolnej liczby $k\in\{2,3,\ldots,n\}$ otrzymujemy na mocy podzielności $x^2+k^2|H(x)$, że $x^2+k^2|P_2(x)+1$ lub $x^2+k^2|P_2(x)-1$. Wielomian P_2 jest unormowany, zatem musi zachodzić $P_2(x)=x^2+k^2\pm 1$ dla każdego $k\in\{2,3,\ldots,n\}$. Jest to oczywiście niemożliwe dla $n\geqslant 3$.

Pozostaje jeszcze spostrzec, że dla $n=2$ z powyższego rozumowania uzyskujemy $P_2(x)=x^2+3$ lub $P_2(x)=x^2+5$, ale żaden z tych wielomianów nie jest dzielnikiem $W(x)=x^4+5x^2+5$. Rozwiązanie jest więc zakończone.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie I zakładamy, że istnieje rozkład $W(x)=P_1(x)P_2(x)$ na wielomiany o współczynnikach całkowitych. W szczególności więc $n\geqslant 2$.

Dla dowolnej liczby $k=2,3,\ldots,n$ liczba zespolona ki spełnia zależność

$$P_1(ki)P_2(ki)=W(ki)=1.$$

Zauważmy teraz, że liczby $P_1(ki)$, $P_2(ki)$ są postaci $a+bi$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi, a ponadto części urojone tych liczb są podzielne przez k. Ponieważ jedynymi rozkładami liczby 1 na iloczyn liczb zespolonych o całkowitej części rzeczywistej i urojonej są rozkłady

$$1=1\cdot 1=(-1)\cdot(-1)=i\cdot(-i),$$

więc wynika stąd, że $P_1(ki)=P_2(ki)=\pm 1$. Wobec tego liczba ki jest pierwiastkiem wielomianu $P_1(x)-P_2(x)$. Analogicznie rozumujemy dla liczby $-ki$. Stąd wniosek, że

$$(x-ki)(x+ki)=x^2+k^2|P_1(x)-P_2(x),$$

więc otrzymujemy podzielność

$$H(x)|P_1(x)-P_2(x), \qquad \text{gdzie } H(x)=(x^2+2^2)(x^2+3^2)\ldots(x^2+n^2).$$

Przyjmijmy, że $P_1(x)-P_2(x)=H(x)G(x)$. Wielomian G ma oczywiście współczynniki całkowite, gdyż H jest wielomianem unormowanym. Widzimy, że wielomiany P_1 i P_2 mają stopień najwyżej $2n-1$, a H jest wielomianem stopnia $2n-2$. To oznacza, że G jest wielomianem stałym bądź stopnia pierwszego. Iloczyn liczb $P_1(i)$ i $P_2(i)$ jest równy 1, więc patrząc na wypisane wcześniej rozkłady liczby 1 na iloczyn stwierdzamy, że różnica $P_1(i)-P_2(i)$ jest równa 0 lub $\pm 2i$. Wobec tego

$$\begin{aligned}2\geqslant |P_1(i)-P_2(i)|&=|(i^2+2^2)(i^2+3^2)\ldots(i^2+n^2)G(i)|=\\&=(2^2-1)(3^2-1)\ldots(n^2-1)|G(i)|.\end{aligned}$$

Ponieważ liczba $G(i)$ ma całkowitą część rzeczywistą i urojoną, więc $G(i)=0$ albo $|G(i)|\geqslant 1$. Z powyższej nierówności wynika więc, że musi być $G(i)=0$. Ponieważ G

jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej pierwszego, wymusza to $G \equiv 0$. Ale w takim razie $P_1(x) \equiv P_2(x)$, co daje

$$(n!)^2 + 1 = W(0) = P_1(0)P_2(0) = (P_1(0))^2,$$

i dostajemy sprzeczność, bowiem liczba $(n!)^2+1$ nie może być kwadratem liczby całkowitej.

21. Dany jest taki sześciokąt wypukły $ABCDEF$, że pola trójkątów ACE i BDF są równe. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków danego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Niech K, L, M, N, O, P będą odpowiednio środkami odcników AB, BC, CD, DE, EF, FA i przyjmijmy, że proste KN i LO przecinają się w punkcie Q. Niech ponadto S będzie środkiem odcinka EB. Wówczas

$$[KLS] = \frac{1}{4}[ACE] = \frac{1}{4}[BDF] = [SNO],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Zatem na mocy zadania 10 z zawodów indywidualnych zastosowanego do czworokąta $KLNO$, środki X, Y, Z odpowiednio odcinków QS, KO, LN leżą na jednej prostej.

Ponieważ czworokąty $PKSO$ i $MLSN$ są równoległobokami, więc punkty Y, Z są środkami odpowiednio odcinków SP i SM. Zatem jednokładność o środku S i skali 2 przeprowadza współliniowe punkty X, Y, Z odpowiednio na współliniowe punkty Q, P, M. Wobec tego prosta PM przechodzi przez punkt Q.

22. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a_1, a_2, $\ldots$, a_n spełniona jest nierówność

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2} + \frac{a_2^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2} + \ldots + \frac{a_n^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{3}.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że liczby

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}^3}{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2}$$

są równe, ponieważ ich różnica wynosi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3 - a_{i+1}^3}{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2} = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = 0.$$

Zatem wystarczy udowodnić nierówność

$$\frac{a_1^3+a_2^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2} + \frac{a_2^3+a_3^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2} + \ldots + \frac{a_n^3+a_1^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2} \geqslant \frac{2}{3}(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Ponieważ zaś dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \geqslant \frac{x+y}{3},$$

(po uproszczeniu przyjmuje ona równoważną postać $2(x+y)(x-y)^2 \geqslant 0$), więc podstawiając $x=a_i$, $y=a_{i+1}$ i sumując stronami dla $i=1,2,\ldots,n$ otrzymujemy tezę.

23. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba

$$n^4+n^3+n^2+n+1$$

ma co najmniej 2007 różnych dzielników pierwszych.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy $W(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$. Wykażemy najpierw, że zbiór liczb pierwszych będących dzielnikami przynajmniej jednej z liczb $W(1)$, $W(2)$, $\ldots$ jest nieskończony.

Gdyby liczby p_1, p_2, ..., p_k były wszystkimi liczbami pierwszymi dzielącymi przynajmniej jedną z liczb $W(1)$, $W(2)$, ..., to liczba $W(p_1p_2\ldots p_k)$ jako liczba całkowita większa od 1 musiałaby dzielić się przez jedną z nich. Z drugiej strony, liczba ta daje resztę 1 z dzielenia przez każdą z tych liczb pierwszych, gdyż

$$W(p_1p_2\ldots p_k)=1+p_1p_2\ldots p_k(1+p_1p_2\ldots p_k+p_1^2p_2^2\ldots p_k^2+p_1^3p_2^3\ldots p_k^3),$$

i otrzymujemy sprzeczność.

Wobec tego istnieją takie różne liczby pierwsze q_1, q_2, ..., q_{2007} oraz liczby całkowite dodatnie n_1, n_2, ..., n_{2007}, że

$$q_i|W(n_i) \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,2007.$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje taka liczba całkowita n, że

$$n\equiv n_i \pmod{q_i} \qquad\qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,2007.$$

Ponieważ zaś W jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, więc zależność $a\equiv b \pmod{d}$ pociąga $W(a)\equiv W(b) \pmod{d}$. W związku z tym mamy

$$W(n)\equiv W(n_i)\equiv 0 \pmod{q_i} \qquad\qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,2007,$$

i widzimy, że liczba n spełnia wymagania zadania.

Sposób II

Tak jak poprzednio, oznaczmy $W(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$. Dla $n>1$ mamy

$$W(n)=\frac{n^5-1}{n-1} \quad \text{oraz} \quad W(n^2)=\frac{n^{10}-1}{n^2-1}=\frac{n^5-1}{n-1}\cdot\frac{n^5+1}{n+1}=W(n)\cdot\frac{n^5+1}{n+1}.$$

Ponadto jeżeli n jest liczbą parzystą, to liczby $\dfrac{n^5-1}{n-1}$ oraz $\dfrac{n^5+1}{n+1}$ są względnie pierwsze. Istotnie: jeśli d jest ich wspólnym dzielnikiem dodatnim, to jest też dzielnikiem nieparzystych liczb n^5-1 i n^5+1 różniących się o 2, skąd wynika $d=1$. Wobec tego liczba $W(n^2)$ jest podzielna przez $W(n)$ i ma dzielnik pierwszy, który nie jest dzielnikiem liczby $W(n)$. Przyjmijmy teraz

$$a_k = 2^{2^k} \qquad \text{dla } k=1,2,\ldots,2007.$$

Wówczas dla $k>1$ mamy $a_k=a_{k-1}^2$, zatem w myśl wcześniejszego spostrzeżenia liczba $W(a_k)$ ma co najmniej jeden dzielnik pierwszy więcej niż liczba $W(a_{k-1})$. Ponieważ $W(a_1)=W(2)>1$, więc przez prostą indukcję widzimy, że liczba $W(a_{2007})$ ma co najmniej 2007 dzielników pierwszych. Liczba $n=a_{2007}$ spełnia więc tezę zadania.

24. Dana jest nieskończona rodzina zbiorów 3-elementowych. Udowodnić, że jeżeli każde dwa z tych zbiorów mają niepustą część wspólną, to istnieje taki zbiór 2-elementowy, który ma niepustą część wspólną z każdym zbiorem z tej rodziny.

Rozwiązanie

Niech $\{a,b,c\}$ będzie jednym z danych zbiorów. Gdyby każdy z elementów a, b, c należał do skończenie wielu pozostałych zbiorów z danej rodziny, to wśród pozostałych zbiorów istniałoby nieskończenie wiele zbiorów rozłącznych ze zbiorem $\{a,b,c\}$, wbrew założeniom zadania. Możemy zatem przyjąć, że element a należy do nieskończenie wielu zbiorów z rozpatrywanej rodziny.

Jeśli element a należy do wszystkich zbiorów rodziny, to teza jest oczywiście spełniona. W przeciwnym razie możemy bez ograniczenia ogólności rozumowania przyjąć, że wśród danych zbiorów istnieje zbiór postaci $\{b,d,e\}$, przy czym elementy d, e są różne od a.

Jeżeli każdy zbiór z rozważanej rodziny zawiera element a lub b, to zbiór $\{a,b\}$ spełnia tezę zadania.

W przeciwnym przypadku istnieje w danej rodzinie zbiór S nie zawierający żadnego z elementów a, b. Zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele zbiorów rodziny zawierających element a i nie zawierających elementu b (gdyż w przeciwnym razie istniałoby nieskończenie wiele zbiorów postaci $\{a,b,x\}$ dla różnych elementów x, ale wówczas jeden z takich zbiorów byłby rozłączny ze zbiorem S i otrzymalibyśmy sprzeczność z warunkami zadania). Każdy z takich zbiorów ma niepustą część wspólną ze zbiorem $\{b,d,e\}$. Wobec tego nieskończenie wiele zbiorów danej rodziny zawiera elementy a, d lub zawiera elementy a, e. Nie zmniejszając ogólności przypuśćmy, że istnieje nieskończenie wiele zbiorów postaci $\{a,d,x\}$ dla różnych wartości x. Każdy zbiór danej rodziny ma niepustą część z dowolnym zbiorem tej postaci, a zatem musi zawierać element a lub d. W tej sytuacji zbiór $\{a,d\}$ spełnia tezę.

25. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek

$$ab+bc+ca \leqslant 3abc.$$

Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a+b+c.$$

Rozwiązanie

Założenia przepisujemy w postaci

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant 3.$$

Zatem na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i harmoniczną mamy

$$a+b+c\geqslant \frac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\geqslant 3,$$

co oznacza, że

$$a+b+c\geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Stąd i z nierówności Cauchy'ego-Schwarza uzyskujemy

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leqslant (a+b+c)^2\leqslant (a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

skąd wynika teza zadania.

26. Dana jest tablica rozmiaru $2n\times 2n$, w której $3n$ pól pomalowano na czarno. Wykazać, że można tak wybrać n kolumn oraz n wierszy, by każde czarne pole znalazło się w pewnym wybranym wierszu lub w pewnej wybranej kolumnie.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy wszystkie możliwe wybory n wierszy tablicy. Liczba takich wyborów wynosi $\binom{2n}{n}$, jest więc skończona. Wobec tego możemy spośrod wszystkich tych wyborów nich wziąć pod uwagę ten wybór, dla którego liczba czarnych pól w wybranych wierszach jest największa. Udowodnimy, że wówczas w wybranych wierszach znajduje się co najmniej $2n$ czarnych pól.

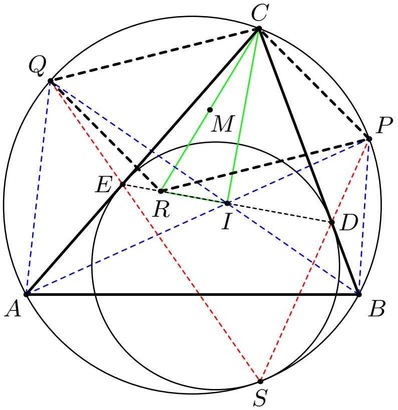
Rzeczywiście, gdyby w wybranych n wierszach było najwyżej $2n-1$ czarnych pól, to jeden z wybranych wierszy zawierałby najwyżej jedno czarne pole. Natomiast w pozostałych n wierszach znajduje się co najmniej $n+1$ czarnych pól, więc jeden z niewybranych wierszy zawiera co najmniej dwa czarne pola. To prowadzi jednak do sprzeczności ze sposobem wyboru n wierszy.

Tak więc możemy wybrać n wierszy, w których znajduje się co najmniej $2n$ czarnych pól. Pozostałych czarnych pól jest najwyżej n, więc bez problemu możemy wybrać n kolumn tak, by wszystkie czarne pola znalazły się w wybranych wierszach i kolumnach.

27. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Punkty P i Q są odpowiednio środkami tych łuków BC i CA okręgu o, które nie zawierają odpowiednio punktów A i B. Okrąg s jest styczny wewnętrznie do okręgu o oraz jest styczny do odcinków BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt R jest takim punktem, że czworokąt $PCQR$ jest równoległobokiem. Wykazać, że punkty D, E, R leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez S punkt styczności okręgów o i s (zob. rys. 12) i weźmy pod uwagę jednokładność j o środku w punkcie S przekształcającą okrąg s na okrąg o. Przy jednokładności j prosta BC przechodzi na prostą l równoległą do prostej BC i styczną do okręgu o. Punkt P jest środkiem łuku BC okręgu o, więc leży on na prostej l. Ponadto jednokładność j przekształca punkt styczności D na punkt styczności P. Wynika stąd, że punkty S, D, P leżą na jednej prostej. Analogicznie dowodzimy, że punkty S, E, Q leżą na jednej prostej.



rys. 12

Proste AP i BQ są dwusiecznymi odpowiednio kątów BAC i CBA, więc przecinają się w punkcie I, który jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Zastosujmy teraz twierdzenie Pascala dla ciągu punktów S, P, A, C, B, Q. Otrzymujemy wówczas, że punkty

$$D = SP \cap CB, \quad I = PA \cap BQ, \quad E = AC \cap QS$$

leżą na jednej prostej. Ponadto trójkąt DCE jest równoramienny (odcinki stycznych CD i CE mają równe długości), a prosta CI jest dwusieczną kąta $\sphericalangle DCE$. To oznacza, że punkt I jest środkiem odcinka DE. Wobec tego proste CI i DE są prostopadłe i do zakończenia rozwiązania pozostaje wykazać, iż proste CI i IR są prostopadłe.

Jak wiadomo (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek E, str. 113), zachodzą równości $PB = PC = PI$. Ponieważ czworokąt $PCQR$ jest równoległobokiem, otrzymujemy równość $QR = PI$. Podobnie uzyskujemy $PR = QI$. Zatem trójkąty PRQ i QIP są przystające. Punkt M przecięcia przekątnych równoległoboku $PCQR$ jest środkiem każdej z nich, więc dostajemy $MR = MI$ (w myśl udowodnionego przed chwilą przystawania trójkątów) oraz $MR = MC$. W konsekwencji punkty R, I, C leżą na okręgu o średnicy RC, skąd bezpośrednio wynika żądana prostopadłość $CI \perp IR$.

28. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: Jeżeli względnie pierwsze dodatnie liczby całkowite a i b są dzielnikami liczby n, to również liczba $a+b-1$ jest dzielnikiem liczby n.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Liczby 1 i 12 oraz potęgi liczb pierwszych.

Nietrudno sprawdzić, że liczby 1 i 12 mają żądaną własność. Mają ją również potęgi liczb pierwszych: istotnie, jeżeli względnie pierwsze dodatnie liczby całkowite a i b są dzielnikami potęgi liczby pierwszej, to jedną z tych liczb musi być 1, zatem wyrażenie $a+b-1$ jest równe drugiej z tych liczb, która z założenia jest dzielnikiem rozważanej potęgi.

Pozostaje udowodnić, że są to jedyne liczby o postulowanej własności.

Przypuśćmy, że nieparzysta liczba n spełnia warunki zadania i niech p będzie jej najmniejszym dzielnikiem pierwszym. Zapiszmy liczbę n w postaci $n=p^k \cdot m$, gdzie $k \geqslant 1$ i liczba m nie jest podzielna przez p. Liczby p i m są względnie pierwszymi dzielnikami liczby n, więc liczba $p+m-1$ też jest dzielnikiem liczby n.

Gdyby liczba $p+m-1$ miała dzielnik pierwszy q różny od p, to liczba $n=p^k \cdot m$ byłaby podzielna przez q, a co za tym idzie — liczba m byłaby podzielna przez q. Z podzielności $q|p+m-1$ oraz $q|m$ otrzymalibyśmy $q|p-1$, co nie jest możliwe, gdyż na mocy określenia liczby p mamy $p<q$.

Zatem liczba $p+m-1$ jest potęgą liczby pierwszej p. Wobec tego liczby $p+m-1$ i m są względnie pierwszymi dzielnikami liczby n. Liczba $(p+m-1)+m-1=p+2m-2$ jest więc dzielnikiem liczby n. Rozumując analogicznie stwierdzamy, że dzielnik ten jest potęgą liczby pierwszej p. Przyjmijmy, że

$$p+m-1=p^a \qquad \text{oraz} \qquad p+2m-2=p^b$$

dla pewnych wykładników $a,b \geqslant 0$. Jeżeli $m>1$, to zachodzi nierówność $b>a$, z której na mocy powyższych równości dostajemy

$$m=\frac{p^b-p}{2}+1=p^{b-1}\cdot\frac{p-1}{2}+1 \geqslant p^a\cdot\frac{p-1}{2}+1 \geqslant p^a+1>p^a=p+m-1>m,$$

co jest sprzecznością. Zatem $m=1$ i $n=p^k$ jest potęgą liczby pierwszej.

Rozpatrzmy z kolei przypadek, gdy n jest liczbą parzystą; niech $n=2^r \cdot s$, gdzie $r \geqslant 1$ i s jest liczbą nieparzystą. Możemy przy tym przyjąć, że $s>1$, gdyż w przypadku $s=1$ liczba $n=2^r$ jest potęgą liczby pierwszej, a tę możliwość już zbadaliśmy. Liczba s oczywiście również spełnia warunki zadania. Wobec tego z początkowej części rozwiązania wnioskujemy, że $s=p^t$ dla pewnej nieparzystej liczby pierwszej p i wykładnika $t \geqslant 1$.

Jeżeli $t \geqslant 2$, to liczby 2 i p^2 są względnie pierwszymi dzielnikami liczby n i wobec tego liczba p^2+1 jest dzielnikiem liczby n. Jednakże liczba ta nie jest podzielna przez p i daje resztę 2 z dzielenia przez 4. Z uwagi na równość $n=2^r \cdot p^t$ oznacza to, że $p^2+1=2$, co jest oczywiście niemożliwe. Zatem $t=1$.

Jeżeli $r=1$, to mamy $n=2p$. Ale wówczas liczby 2 i p są względnie pierwszymi dzielnikami liczby n, a liczba $p+1$ nie jest dzielnikiem liczby $2p$.

Doszliśmy więc do wniosku, że $r \geqslant 2$ oraz $t=1$. Liczby 2, 4 i p są dzielnikami liczby $n=2^r \cdot p$, zatem dzielnikami są też liczby $p+1$ i $p+3$. Jeśli żadna z tych liczb nie dzieli się przez p, to obie muszą być potęgami dwójki, co nie może mieć miejsca, gdyż liczby te różnią się o 2 i są większe od 2. Zatem jedna z liczb $p+1$, $p+3$ musi być podzielna przez p. Jest to możliwe jedynie w przypadku $p=3$.

W efekcie $n=3 \cdot 2^r$. Jeżeli jednak $r \geqslant 3$, to liczby 8 i 3 są dzielnikami liczby n, a liczba $8+3-1=10$ nie jest dzielnikiem. Stąd wynika, że $r=2$, czyli $n=12$.

29. W trójkącie ABC kąt $\sphericalangle ABC$ jest rozwarty. Punkt F leży na boku AC, przy czym

$$AF=BF \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle FBC=90^\circ.$$

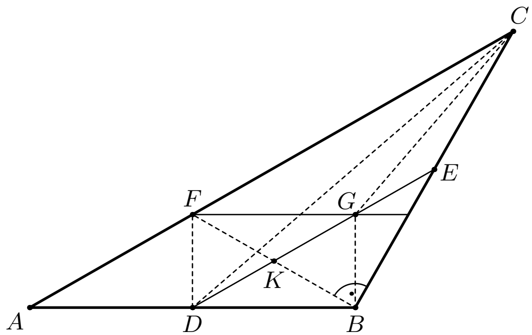
Punkty D i E są odpowiednio środkami boków AB i BC. Prosta przechodząca przez punkt F i równoległa do boku AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że

$$\sphericalangle GCB = \sphericalangle ACD.$$

Rozwiązanie

Na mocy warunków zadania trójkąt ABF jest równoramienny, co w połączeniu z zależnością $GF \parallel AB$ daje (zob. rys. 13)

$$\sphericalangle CFG = \sphericalangle FAB = \sphericalangle FBA = \sphericalangle GFB.$$



rys. 13

Ponadto na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $AC \parallel DE$, zatem

$$\sphericalangle DGF = \sphericalangle CFG = \sphericalangle BFG.$$

Jeżeli więc przez K oznaczymy punkt wspólny odcinków DG i BF, to trójkąt GKF jest równoramienny. Trójkąty KGF i KDB są oczywiście jednokładne względem punktu K, a więc są podobne. Ponadto na mocy warunków zadania proste FD i AB

są prostopadłe i w konsekwencji $KD = KF$. To dowodzi, że trójkąty KGF i KDB są przystające. Łącząc te spostrzeżenia dochodzimy do wniosku, że czworokąt $DBGF$ jest prostokątem.

Równości $\sphericalangle DBG = \sphericalangle FBC = 90^\circ$ pozwalają wnioskować, że $\sphericalangle FBD = \sphericalangle GBC$. Trójkąt FAB jest równoramienny, więc

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle GBC, \tag{1}$$

a skoro trójkąt KDB też jest równoramienny, mamy również

$$\sphericalangle EDB = \sphericalangle GBE,$$

co z kolei implikuje podobieństwo trójkątów DBE i BGE. W takim razie

$$\frac{BG}{BD} = \frac{BE}{DE}.$$

Korzystając teraz z podobieństwa trójkątów DBE i ABC dostajemy

$$\frac{BG}{BC} = \frac{BG}{AD} \cdot \frac{AD}{BC} = \frac{BG}{BD} \cdot \frac{AD}{BC} = \frac{BE}{DE} \cdot \frac{AD}{BC} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AD}{BC} = \frac{AD}{AC}.$$

Wraz z równością (1) pociąga to podobieństwo trójkątów CAD i CBG, z którego wynika teza zadania.

30. Wyrazy ciągu a_1, a_2, ... są liczbami całkowitymi dodatnimi i każda liczba całkowita dodatnia występuje w tym ciągu dokładnie jeden raz. Ponadto

$$a_{n+1} \in \{a_n - 1, 4a_n - 1\} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrazu a_{2007}.

Rozwiązanie

Odpowiedź: 1064 i 2088.

Rozpatrzmy dowolny wyraz a_n danego ciągu. Jeżeli liczba $a_n - 1$ występuje wśród wyrazów a_1, a_2, ..., a_n albo jest równa 0, to na mocy warunków zadania wyraz a_{n+1} nie może być równy $a_n - 1$. W tym przypadku zachodzi więc równość $a_{n+1} = 4a_n - 1$. Przypuśćmy z kolei, ze liczba $a_n - 1$ jest dodatnia i nie występuje wśród wyrazów a_1, a_2, ..., a_n. Wtedy musimy mieć $a_{n+1} = a_n - 1$; w przeciwnym razie byłoby bowiem $a_i = a_n - 1$ przy pewnym $i > n + 1$, gdyż każda liczba naturalna jest wyrazem danego ciągu. Jednak patrząc na ciąg a_n, a_{n+1}, ..., a_{i-1}, a_i widzimy, że dowolny wyraz w wypisanym ciągu jest albo większy od poprzedniego, albo o 1 mniejszy od poprzedniego, zatem wobec nierówności $a_i < a_n < a_{n+1}$ musielibyśmy mieć $a_j = a_n$ dla pewnego wskaźnika $n+1 < j < i$, wbrew założeniom zadania.

Udowodniliśmy w ten sposób, że każdy odcinek początkowy a_1, a_2, ..., a_n jednoznacznie wyznacza wyraz a_{n+1} zgodnie z następującym wzorem:

$$\begin{cases} a_n - 1, & \text{jeżeli } a_n > 1 \text{ oraz } a_n - 1 \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \\ 4a_n - 1, & \text{jeżeli } a_n = 1 \text{ lub } a_n - 1 \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}. \end{cases} \tag{1}$$

W szczególności wartość a_1 jednoznacznie wyznacza cały ciąg a_1, a_2, a_3, ...

Jeżeli $a_1=m$, to ze wzoru (1) otrzymujemy $a_2=m-1$, $a_3=m-2$, …, $a_m=1$, $a_{m+1}=3$. Liczba 3 nie może w danym ciągu występować dwukrotnie, więc $m\leqslant 2$. Innymi słowy, $a_1\in\{1,2\}$.

Dla $a_1=1$ otrzymujemy ciąg 1, 3, 2, 7, 6, 5, 4, 15, 14, …. Przez prostą indukcję widzimy, że

$$a_n=3\cdot 2^k-1-n \qquad \text{dla } 2^k\leqslant n<2^{k-1}.$$

Ponieważ zaś $2^{10}<2007<2^{11}$, dostajemy $a_{2007}=3\cdot 2^{10}-2008=\mathbf{1064}$.

Dla $a_1=2$ mamy ciąg 2, 1, 3, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 15, 14, 13, 12, 47, …, który możemy wyrazić następujaco:

$$a_n=\begin{cases}4^{k+1}-1-n & \text{dla } 4^k\leqslant n<3\cdot 4^k,\\ 7\cdot 4^{k+1}-1-n & \text{dla } 3\cdot 4^k\leqslant n<4^{k+1}.\end{cases}$$

Ponadto $4^5<2007<3\cdot 4^5$, skąd dostajemy $a_{2007}=4^6-2008=\mathbf{2088}$.

31. Dane są liczby całkowite a_1, b_1, c_1, d_1. Niech ponadto

$$a_{i+1}=|a_i-b_i|,\quad b_{i+1}=|b_i-c_i|,\quad c_{i+1}=|c_i-d_i|,\quad d_{i+1}=|d_i-a_i|$$

dla $i=1,2,3,\ldots$. Wykazać, że istnieje taki wskaźnik k, że

$$a_k=b_k=c_k=d_k=0.$$

Rozwiązanie

Niech M będzie największą z liczb a_2, b_2, c_2, d_2. Wtedy liczby a_k, b_k, c_k, d_k dla $k\geqslant 2$ należą do przedziału $\langle 0;M\rangle$. Istotnie: dla $k=2$ jest to prawdą, a rozumując indukcyjnie widzimy, że gdy $a_k,b_k,c_k,d_k\in\langle 0;M\rangle$, to liczby a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1} jako wartości bezwzględne różnic dwóch liczb należących do przedziału $\langle 0;M\rangle$ również należą do tego przedziału.

Wykażemy z kolei, że liczby a_5, b_5, c_5, d_5 są parzyste. Zauważmy w tym celu, że z dokładnością do cyklicznego przestawienia istnieje 6 klas parzystości każdej czwórki liczb całkowitych (a_i,b_i,c_i,d_i):

$$(P,P,P,P),(P,P,P,N),(P,P,N,N),(P,N,P,N),(P,N,N,N),(N,N,N,N),$$

gdzie P oznacza liczbę parzystą, zaś N liczbę nieparzystą. Wykonując bezpośrednie rachunki w zależności od klasy czwórki (a_1,b_1,c_1,d_1) otrzymujemy następujące wyniki:

(a_1,b_1,c_1,d_1)	(a_2,b_2,c_2,d_2)	(a_3,b_3,c_3,d_3)	(a_4,b_4,c_4,d_4)	(a_5,b_5,c_5,d_5)
(P,P,P,P)	(P,P,P,P)	(P,P,P,P)	(P,P,P,P)	(P,P,P,P)
(P,P,P,N)	(N,P,P,N)	(N,P,N,P)	(N,N,N,N)	(P,P,P,P)
(P,P,N,N)	(P,N,P,N)	(N,N,N,N)	(P,P,P,P)	(P,P,P,P)
(P,N,P,N)	(N,N,N,N)	(P,P,P,P)	(P,P,P,P)	(P,P,P,P)
(P,N,N,N)	(N,P,P,N)	(N,P,N,P)	(N,N,N,N)	(P,P,P,P)
(N,N,N,N)	(P,P,P,P)	(P,P,P,P)	(P,P,P,P)	(P,P,P,P)

Zatem liczby a_5, b_5, c_5, d_5 są parzyste. Rozumując analogicznie dowodzimy, że liczby a_9, b_9, c_9, d_9 są podzielne przez 4 i ogólnie: liczby a_{4t+1}, b_{4t+1}, c_{4t+1}, d_{4t+1} są podzielne przez 2^t dla $t \geqslant 1$.

Wybierzmy teraz taką liczbę całkowitą dodatnią s, że $2^s > M$. Wówczas liczby a_k, b_k, c_k, d_k, gdzie $k = 4s+1$, są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle 0; M\rangle$ podzielnymi przez 2^s. Wynika stąd, że $a_k = b_k = c_k = d_k = 0$.

32. Dane są takie niezerowe liczby całkowite a, b, c, że $a+b+c=0$. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest podzielność

$$a^2+b^2+c^2 \mid a^{n^2+1}+b^{n^2+1}+c^{n^2+1}.$$

Rozwiązanie

Rozpatrzmy wielomian

$$W(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - px^2 + qx - r.$$

Liczba a jest jego pierwiastkiem, więc $a^3 = pa^2 - qa + r$ i w efekcie

$$a^m = pa^{m-1} - qa^{m-2} + ra^{m-3} \qquad \text{dla } m \geqslant 3.$$

Powyższa równość pozostanie prawdziwa, jeżeli w miejsce a wpiszemy b lub c. Przyjmując oznaczenie

$$S_m = a^m + b^m + c^m$$

wnioskujemy stąd, że

(1) $$S_m = pS_{m-1} - qS_{m-2} + rS_{m-3} \qquad \text{dla } m \geqslant 3.$$

Korzystając ze wzorów Viete'a otrzymujemy $p = a+b+c = 0$ oraz

$$q = ab+bc+ca = \tfrac{1}{2}[(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2] = -\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Z równości $a+b+c=0$ wynika ponadto, że liczby S_1, S_2, S_3, ... są parzyste. Zatem dla $m \geqslant 3$ równość (1) daje

$$\begin{aligned} S_m = pS_{m-1} - qS_{m-2} + rS_{m-3} &= -\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)S_{m-2} + rS_{m-3} = \\ &= -\tfrac{1}{2}S_{m-2}\cdot S_2 + rS_{m-3} \equiv rS_{m-3} \pmod{S_2}. \end{aligned}$$

Jeżeli więc liczba S_{m-3} jest podzielna przez S_2, to liczba S_m również. Liczby $S_1 = 0$ i S_2 są oczywiście podzielne przez S_2. Stosując indukcję dochodzimy więc do wniosku, że liczba $S_m = a^m + b^m + c^m$ jest podzielna przez $S_2 = a^2+b^2+c^2$ dla wskaźników m niepodzielnych przez 3. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej nie może dawać reszty 2 z dzielenia przez 3, więc liczba n^2+1 nie jest podzielna przez 3. Stąd otrzymujemy podzielność $S_2 | S_{n^2+1}$ dla dowolnego n, czyli tezę zadania.

33. Dany jest skończony podzbiór A zbioru liczb pierwszych oraz liczba całkowita dodatnia a. Wykazać, że istnieje tylko skończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich m, że wszystkie dzielniki pierwsze liczby $a^m - 1$ należą do zbioru A.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, wbrew tezie, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb m, że wszystkie dzielniki pierwsze liczby a^m-1 należą do zbioru A. Niech B będzie zbiorem wszystkich takich liczb m.

Oznaczmy $A=\{q_1,q_2,\ldots,q_k\}$ i załóżmy, że istnieją wykładniki r_1, r_2, ..., r_k o następującej własności: Jeżeli $m\in B$, to liczba a^m-1 nie jest podzielna przez $q_i^{r_i+1}$ dla $i=1,2,\ldots,k$. Ponieważ wszystkie dzielniki pierwsze liczby a^m-1 należą do zbioru A, otrzymujemy stąd, że liczba a^m-1 jest dzielnikiem liczby $q_1^{r_1}q_2^{r_2}\ldots q_k^{r_k}$. To jednak nie może mieć miejsca dla nieskończenie wielu wartości m, a więc początkowe założenie było fałszywe.

Istnieje więc taka liczba pierwsza $p\in A$, że wśród liczb a^m-1 dla $m\in B$ można znaleźć liczbę podzielną przez dowolnie ustaloną potęgę liczby p.

Niech teraz k będzie dowolnym wykładnikiem i wybierzmy taką liczbę całkowitą dodatnią h, by zachodziła nierówność

$$p^h > a^{(p-1)p^{k-1}}-1. \qquad (1)$$

Istnieje taka liczba $m\in B$, że liczba a^m-1 jest podzielna przez p^h.

Niech g będzie najmniejszą taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczba a^g-1 jest podzielna przez p^h. Wówczas podzielność $p^h|a^n-1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $g|n$. Korzystając z twierdzenia Eulera otrzymujemy podzielności

$$p|a^{p-1}-1, \quad p^2|a^{(p-1)p}-1, \quad p^3|a^{(p-1)p^2}-1, \quad p^4|a^{(p-1)p^3}-1, \quad \ldots.$$

W szczególności mamy $p^h|a^{(p-1)p^{h-1}}-1$, skąd dostajemy podzielność $g|(p-1)p^{h-1}$. Z nierówności (1) wynika, że wykładnik g jest większy od $(p-1)p^{k-1}$. Każdy dzielnik liczby $(p-1)p^{h-1}$ większy od $(p-1)p^{k-1}$ jest wielokrotnością liczby p^k. Wobec tego $p^k|g$ i tym bardziej $p^k|m$. To oznacza, że liczba $a^{p^k}-1$ jest dzielnikiem liczby a^m-1. Skoro wszystkie dzielniki pierwsze liczby a^m-1 należą do zbioru A, to tym bardziej własność tę ma liczba $a^{p^k}-1$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że wszystkie dzielniki pierwsze każdej z liczb

$$a^p-1, \quad a^{p^2}-1, \quad a^{p^3}-1, \quad \ldots$$

należą do zbioru A. Zbiór ten jest skończony, więc istnieje taki wskaźnik t, że liczby $C=a^{p^t}-1$ oraz $D=a^{p^{t+1}}-1$ mają te same dzielniki pierwsze, a przy tym jeżeli kwadrat jakiejkolwiek liczby pierwszej jest dzielnikiem liczby D, to kwadrat tej liczby pierwszej jest również dzielnikiem liczby C. Ponieważ

$$\frac{D}{C}=\frac{a^{p^{t+1}}-1}{a^{p^t}-1}=1+a^{p^t}+a^{2p^t}+\ldots+a^{(p-1)p^t}\equiv\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{p}=p \pmod{C},$$

więc liczby C i $\frac{D}{C}$ nie mają wspólnych dzielników pierwszych różnych od p. Ponadto liczba $\frac{D}{C}$ nie może być podzielna przez p^2 (w przeciwnym razie liczby C i D byłyby podzielne przez p^2 i doszlibyśmy do sprzeczności z kongruencją $\frac{D}{C}\equiv p \pmod{C}$).

Liczba $\frac{D}{C}$ jest jednakże większa od p. Musi zatem mieć dzielnik pierwszy, nie będący dzielnikiem liczby C. Otrzymaliśmy tym samym sprzeczność z wcześniejszym wnioskiem, że liczby C i D mają te same dzielniki pierwsze.

Rozwiązanie zadania jest więc zakończone.

34. Rozważamy wszystkie takie pary liczb rzeczywistych (a,b), że wielomian

$$P(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx+1$$

ma pierwiastek rzeczywisty. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość sumy a^2+b^2.

Rozwiązanie

Odpowiedź: 8.

Niech liczba rzeczywista t będzie pierwiastkiem wielomianu P. Na podstawie nierówności Cauchy'ego-Schwarza możemy wówczas napisać

$$(a^2+b^2)(t^6+t^2)\geqslant \big(at^3+bt\big)^2=\big(P(t)-t^4-2t^2-1\big)^2=\big(t^4+2t^2+1\big)^2.$$

Liczba t jest różna od zera, gdyż $P(0)=1$. Wobec tego $t^6+t^2>0$ i stosując nierówność $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}$ widzimy, że

$$a^2+b^2\geqslant \frac{\big((t^4+1)+2t^2\big)^2}{t^6+t^2}\geqslant \frac{\Big(2\sqrt{(t^4+1)\cdot 2t^2}\Big)^2}{t^6+t^2}=8\cdot\frac{t^6+t^2}{t^6+t^2}=8.$$

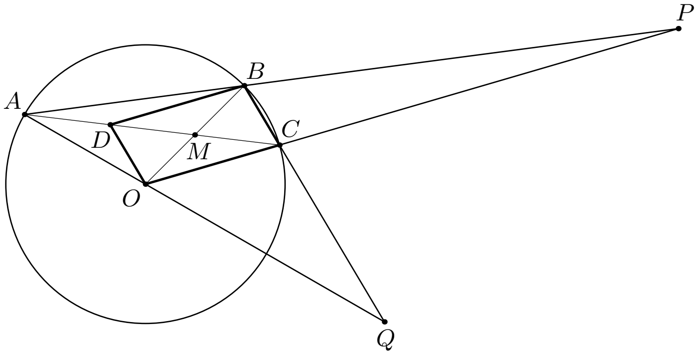
Z drugiej strony, wielomian $P(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ ma pierwiastek $x=1$, a parametry a i b przyjmują wartość -2, czyli badana suma jest równa $a^2+b^2=8$.

35. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu i nie jest jego średnicą. Cięciwa AC tego okręgu przechodzi przez środek odcinka OB. Proste OC i AB przecinają się w punkcie P, zaś proste OA i BC przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że $PC=AQ$.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech D będzie punktem symetrycznym do punktu C względem środka M odcinka OB (zob. rys. 14).



rys. 14

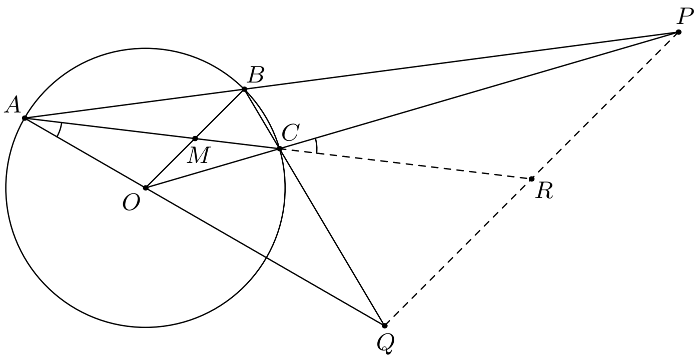
Czworokąt $OCBD$ jest wówczas równoległobokiem; w szczególności zachodzą równości $BD = CO = AO$. Korzystając teraz z równoległości $DB \parallel CP$, $DO \parallel CQ$ oraz z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{PC}{BD} = \frac{AC}{AD} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{AQ}{AO} = \frac{AC}{AD}.$$

Stąd wynika równość stosunków $\dfrac{PC}{BD} = \dfrac{AQ}{AO}$, która w połączeniu z uzyskaną wcześniej zależnością $BD = AO$ daje tezę.

Sposób II

Niech M będzie środkiem odcinka OB, zaś R — punktem przecięcia prostych AC i PQ (zob. rys. 15).



rys. 15

Proste AR, OP i BQ przecinają się w punkcie C, zatem możemy zastosować twierdzenie Cevy do trójkąta AOB. Otrzymamy

$$\frac{AQ}{QO} \cdot \frac{OM}{MB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1.$$

Ponieważ $OM = MB$, dostajemy stąd zależność

$$\frac{AQ}{QO} = \frac{AP}{PB},$$

z której wynika, że trójkąty AOB i AQP są jednokładne względem punktu A. Jednokładność ta przeprowadza punkt M na punkt R, zatem punkt R jest środkiem odcinka PQ i w konsekwencji odległości punktów P i Q od prostej AR są jednakowe.

Z drugiej strony, trójkąt AOC jest równoramienny, co daje $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA$ i w efekcie odcinki AQ i CP tworzą jednakowe kąty z prostą AR. Ponieważ jedne końce tych odcinków leżą na tej prostej, a drugie są od niej jednakowo odległe, więc odcinki te mają równe długości, co kończy rozwiązanie.

36. W pewnym państwie jest n miast. Między każdymi dwoma z nich istnieje dokładnie jedno z następujących połączeń: kolejowe, autobusowe lub lotnicze. Wykazać, że istnieje taki środek komunikacji oraz co najmniej $\frac{n}{2}$ takich miast, by za pomocą tego środka można było odbyć podróż (niekoniecznie bezpośrednią) między dowolnymi dwoma z nich.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy wszystkie zbiory miast o następującej własności: istnieje taki środek komunikacji, że między dowolnymi dwoma z tych miast można odbyć podróż za pomocą tego środka. Spośród wszystkich takich zbiorów wybierzmy zbiór A o największej możliwej liczbie elemetów. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że między dowolnymi dwoma miastami zbioru A można odbyć podróż kolejową. Niech ponadto B będzie zbiorem wszystkich miast nie należących do A.

Jeżeli $|A| \geqslant \frac{n}{2}$, to rozwiązanie zadania jest zakończone. W dalszej części przyjmujemy więc, że $|B| > \frac{n}{2}$. Połączenie między miastami, z których jedno należy do A, a drugie do B, będziemy nazywać *długim*. Z określenia zbioru A wynika, że każde połączenie długie jest połączeniem autobusowym albo lotniczym.

Weźmy pod uwagę zbiór miast C o największej możliwej liczbie elementów, mający następującą własność: Istnieje taki środek komunikacji, że między dowolnymi dwoma miastami zbioru C można odbyć podróż tylko przez połączenia długie i używając jedynie tego środka komunikacji (przyjmijmy, że jest to autobus). Połóżmy $A_0 = A \cap C$, $B_0 = B \cap C$. Z określenia połączenia długiego wynika, że zbiory A_0 i B_0 są niepuste.

Jeżeli $B_0 = B$, to z określenia zbioru C wynika, że między dowolnymi dwoma miastami zbioru B istnieje połączenie autobusowe (być może przechodzące przez pewne miasto ze zbioru A_0). Ponieważ $|B| > \frac{n}{2}$, więc teza zadania jest w tym przypadku spełniona. Przypuśćmy zatem, że $B_0 \neq B$.

Równość $A_0 = A$ jest niemożliwa — w przeciwnym bowiem razie mielibyśmy $|C| = |A_0| + |B_0| > |A_0| = |A|$ wbrew maksymalności zbioru A. Zatem $A_0 \neq A$.

Rozpatrzmy dwa miasta, z których jedno należy do zbioru $A \setminus A_0$, a drugie do $B \setminus B_0$. Załóżmy, że takie dwa miasta mają połączenie lotnicze. Z maksymalności zbiorów A i C wynika, że dowolne dwa miasta, z których jedno należy do A_0, a drugie do $B \setminus B_0$, albo z których jedno należy do B_0, a drugie do $A \setminus A_0$, mają bezpośrednie połączenie lotnicze. Wówczas między dowolnymi dwoma miastami istnieje połączenie lotnicze.

Pozostał więc do zbadania przypadek, w którym dowolne dwa miasta, z których jedno należy do $A \setminus A_0$, a drugie do $B \setminus B_0$, mają bezpośrednie połączenie autobusowe. Wówczas dowolne dwa miasta zbioru $D = A \setminus A_0 \cup B \setminus B_0$ mają połączenie autobusowe. Ponadto dowolne dwa miasta zbioru $C = A_0 \cup B_0$ mają połączenie autobusowe. Jednak suma $C \cup D$ jest n-elementowym zbiorem wszystkich miast. Zatem $|C| \geqslant \frac{n}{2}$ lub $|D| \geqslant \frac{n}{2}$, co kończy rozwiązanie.

Zawody drużynowe:

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie E. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABE, BCE, CDE, DAE. Wykazać, że jeśli w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, to na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez I, J środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC i ACD oraz niech S będzie punktem styczności tych okręgów. Korzystając z zadania 6 zawodów indywidualnych Obozu Naukowego „Zwardoń 2006” zauważamy, że punkty K, L, E, S leżą na jednym okręgu o_1 oraz że punkty M, N, E, S leżą na jednym okręgu o_2. Ponieważ $\sphericalangle KEL = \sphericalangle MEN = 90^\circ$, więc średnicami okręgów o_1 i o_2 są odpowiednio odcinki KL i MN.

Oznaczmy przez T punkt przecięcia prostych KN i LM (jeśli proste KN i LM są równoległe, dowód przebiega analogicznie). Na mocy twierdzenia Gaussa-Bodenmillera okrąg o średnicy ET przechodzi przez punkt S. Zatem proste ST i AC są prostopadłe, a to oznacza, że prosta IJ przechodzi przez punkt T.

Korzystając teraz z twierdzenia Desarguesa (patrz dodatek F do sprawozdania z L OM) dla trójkątów KLI i NMJ wnioskujemy, że punkt X przecięcia prostych KL i MN leży na prostej AC. Wobec tego

$$XK \cdot XL = XE \cdot XS = XN \cdot XM,$$

skąd bezpośrednio wynika, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

2. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek

$$x + y + z + xyz = 4.$$

Dowieść, że zachodzi nierówność

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+z).$$

Rozwiązanie

Sposób I

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

Dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geqslant 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2.$$

Dowód lematu

Przekształcamy równoważnie daną nierówność:

$$(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+bc+ca)+9abc \geqslant 0,$$

$$a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3bc(b+c)+3ca(c+a)+6abc-$$
$$-4ab(a+b)-4bc(b+c)-4ca(c+a)-12abc+9abc \geqslant 0,$$

$$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)+3abc \geqslant 0,$$

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

Możemy bez utraty ogólności rozumowania przyjąć, że $a \leqslant b \leqslant c$. Wówczas mamy $a(a-b)(a-c) \geqslant 0$ oraz

$$b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)=(c-b)[c(c-a)-b(b-a)]=(c-b)^2(c+b-a) \geqslant 0,$$

co kończy dowód lematu.

Przechodząc do rozwiązania zadania udowodnimy najpierw nierówność

$$x+y+z \geqslant xy+yz+zx. \tag{1}$$

Przypuśćmy nie wprost, że nierówność (1) nie zachodzi; z uwagi na udowodniony lemat mamy więc

$$\frac{9xyz}{x+y+z} \geqslant 4(xy+yz+zx)-(x+y+z)^2 > (x+y+z)(4-x-y-z)=(x+y+z)xyz,$$

co implikuje $x+y+z<3$. Ale w takim razie na mocy nierówności średnich zachodzi też $xyz<1$, toteż $x+y+z+xyz<4$. To stoi w sprzeczności z warunkami zadania, zatem nierówność (1) jest udowodniona.

Korzystając teraz z nierówności Cauchy'ego-Schwarza otrzymujemy

$$(x\sqrt{y+z}+y\sqrt{z+x}+z\sqrt{x+y})\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{z+y}}\right) \geqslant (x+y+z)^2,$$

ale również na mocy tejże nierówności oraz zależności (1) mamy

$$\begin{aligned} x\sqrt{y+z}+y\sqrt{z+x}+z\sqrt{x+y} &\leqslant \sqrt{(x+y+z)[x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)]}= \\ &=\sqrt{2(x+y+z)(xy+yz+zx)} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{2}(x+y+z). \end{aligned}$$

Łącząc powyższe dwie zależności uzyskujemy

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{z+y}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+z),$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Korzystając z nierówności Jensena dla funkcji $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, która jest wypukła w przedziale $(0,+\infty)$, otrzymujemy

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}}{x+y+z} = \frac{x}{x+y+z}f(y+z)+\frac{y}{x+y+z}f(z+x)+\frac{z}{x+y+z}f(x+y) \geqslant$$

$$\geqslant f\left(\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{x+y+z}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}}.$$

Zatem do zakończenia rozwiązania wystarczy udowodnić, że

$$x+y+z \geqslant xy+yz+zx. \tag{2}$$

Bez straty dla ogólności rozumowania możemy przyjąć, że x jest najmniejszą, zaś y — największą spośród liczb x, y, z. Wówczas z warunku $x+y+z+xyz=4$ wnioskujemy, że $x \leqslant 1$ oraz $y \geqslant 1$. Przekształcamy teraz równoważnie nierówność (2):

$$x+y+\frac{4-x-y}{1+xy} \geqslant (x+y)\cdot\frac{4-x-y}{1+xy}+xy$$

$$(x+y)(1+xy)+4-x-y \geqslant (x+y)(4-x-y)+xy(1+xy)$$

$$x+y+x^2y+xy^2+4-x-y \geqslant 4x+4y-x^2-y^2-2xy+xy+x^2y^2$$

$$x^2+y^2-4x-4y+2xy+4 \geqslant xy(xy+1-x-y)$$

$$(x+y-2)^2 \geqslant xy(x-1)(y-1).$$

Prawa strona ostatniej nierówności jest niedodatnia, a lewa jest nieujemna. To dowodzi zależności (2) i kończy rozwiązanie zadania.

3. W n-osobowym stowarzyszeniu (gdzie $n>20$) działają komisje. W skład każdej komisji wchodzi 20 osób. Ponadto dla każdej pary członków stowarzyszenia istnieje dokładnie jedna komisja, do której należą obaj członkowie. Wyznaczyć najmniejszą wartość n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $n=381$.

Niech a będzie jednym z członków stowarzyszenia i niech A_1, A_2, ..., A_k będą wszystkimi komisjami, do których należy ten członek. Z warunków zadania wynika, że $k>1$ oraz

$$A_i \cap A_j = \{a\} \qquad \text{dla dowolnych } i,j\in\{1,2,\ldots,k\},\ i\neq j.$$

Każdy członek stowarzyszenia (różny od a) zasiada razem z członkiem a w dokładnie jednej komisji. Stąd wniosek, że 19-elementowe zbiory

$$A_1 \setminus \{a\}, \quad A_2 \setminus \{a\}, \quad \ldots, \quad A_k \setminus \{a\}$$

są parami rozłączne, a ich suma wraz z członkiem a jest zbiorem wszystkich członków stowarzyszenia. Wobec tego liczba wszystkich członków jest równa $n = 19k+1$.

Rozpatrzmy dowolnych członków $b \in A_1 \setminus \{a\}$, $c \in A_2 \setminus \{a\}$. Zasiadają oni razem w pewnej komisji B. Jest to komisja różna od A_1, A_2, ..., A_k, więc komisja B ma najwyżej jednego członka wspólnego z każdą z tych k komisji. Jednakże każdy członek stowarzyszenia należy do pewnej z tych k komisji. Stąd wniosek, że w komisji B zasiada najwyżej k członków. Skutkiem tego $k \geqslant 20$ i $n \geqslant 381$.

Wskażemy teraz sposób utworzenia komisji w 381-osobowym stowarzyszeniu.

Przypiszmy wzajemnie jednoznacznie członkom stowarzyszenia pary (k,m), przy czym $k,m \in \{0,1,2,\ldots,18\}$, oraz pary $(19,m)$, gdzie $m \in \{0,1,2,\ldots,19\}$. Liczba tych par wynosi oczywiście $19^2+20 = 381$. Utwórzmy następujące komisje:

$$\begin{aligned}
A_{i,j} &= \{(k,m) : m \equiv ik+j \pmod{19},\, 0 \leqslant k,m \leqslant 18\} \cup \{(19,i)\} && \text{dla } 0 \leqslant i,j \leqslant 18,\\
A_{19,j} &= \{(j,m) : m = 0,1,\ldots,18\} \cup \{(19,19)\} && \text{dla } 0 \leqslant j \leqslant 18,\\
A_* &= \{(19,m) : m = 0,1,\ldots,19\}.
\end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić, że dowolne dwie różne pary (k,m), (k',m') należą do dokładnie jednego z powyższych zbiorów. W tym celu rozważamy trzy przypadki:

1. $k = k' = 19$.

Wówczas dane pary należą do zbioru A_* i nie należą jednocześnie do żadnego ze zbiorów $A_{i,j}$ dla $0 \leqslant i \leqslant 19$, $0 \leqslant j \leqslant 18$, gdyż każdy z tych zbiorów zajwiera najwyżej jedną parę postaci $(19,t)$, $0 \leqslant t \leqslant 19$.

2. $k < 19$, $k' = 19$.

Wówczas dane pary nie należą do zbioru A_*. Ponadto para (k',m') należy do zbioru postaci $A_{i,j}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = m'$.

Jeżeli $m' = 19$, to para (k,m) należy do zbioru $A_{19,j}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j = k$. Zatem w tym przypadku jedynym zbiorem $A_{i,j}$ zawierającym obie dane pary jest zbiór $A_{19,k}$.

Niech z kolei $m' < 19$. W tej sytuacji para (k,m) należy do zbioru $A_{m',j}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \equiv m'k+j \pmod{19}$. Warunek ten jednoznacznie wyznacza liczbę j — jest to mianowicie reszta z dzielenia liczby $m - m'k$ przez 19. Także w tym przypadku istnieje więc dokładnie jeden zbiór $A_{i,j}$, do którego należą obie dane pary.

3. $k, k' < 19$.

Wówczas żadna z danych par nie należy do zbioru A_*.

Jeżeli $k = k'$, to żaden ze zbiorów $A_{i,j}$ dla $i \leqslant 18$ nie może zawierać jednocześnie par (k,m) i (k',m'). W przeciwnym razie mielibyśmy

$$m' \equiv ik'+j = ik+j \equiv m \pmod{19},$$

czyli $m=m'$, wbrew temu, że dane pary są różne. Natomiast każda z danych par należy do dokładnie jednego ze zbiorów $A_{19,j}$, mianowicie do zbioru $A_{19,k}=A_{19,k'}$. Zatem jedynym zbiorem $A_{i,j}$ zawierającym obie dane pary jest zbiór $A_{19,k}$.

Przypuśćmy wreszcie, że $k\neq k'$. Wówczas pary (k,m) i (k',m') nie mogą należeć jednocześnie do żadnego ze zbiorów postaci $A_{19,i}$, ponieważ dowolne dwie pary należące do zbioru $A_{19,i}$ mają tę samą pierwszą współrzędną (równą i). Z drugiej strony, dane pary należą jednocześnie do zbioru $A_{i,j}$, gdzie $0\leqslant i,j\leqslant 18$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m=ik+j \pmod{19} \qquad \text{oraz} \qquad m'=ik'+j \pmod{19}.$$

Ponieważ $k\neq k' \pmod{19}$, więc powyższy układ równań ma wyznacznik różny od zera (mod 19). Skoro zaś 19 jest liczbą pierwszą, układ ten ze względu na zmienne i, j ma dokładnie jedno rozwiązanie (mod 19) — a zatem dokładnie jedno rozwiązanie (i,j) spełniające $0\leqslant i,j\leqslant 18$.

To kończy rozwiązanie zadania.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie d, dla których istnieje taki wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, że liczba d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb

$$a_n=W(n)+3^n \qquad \text{dla } n=0,1,2,\ldots.$$

Rozwiązanie

Odpowiedź: $d=2^m$ dla $m=0,1,2,\ldots$.

Udowodnimy najpierw, że dowolna liczba d spełniająca warunki zadania nie może mieć dzielników pierwszych nieparzystych. Niech bowiem p będzie dzielnikiem pierwszym liczby d. Liczby a_0 i a_p są więc podzielne przez p, a co za tym idzie, liczba

$$a_p-a_0=W(p)-W(0)+3^p-1$$

jest podzielna przez p. Mamy przy tym $p|W(p)-W(0)$, gdyż $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Stąd $p|3^p-1$. Z drugiej strony, małe twierdzenie Fermata daje podzielnośc $p|3^p-3$. Skutkiem tego $p|2$, czyli $p=2$.

Pozostaje wykazać, że liczby $d=1,2,4,8,16,\ldots$ mają zadaną własność.

Niech m będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Rozpatrzmy wielomiany

$$G_i(x)=\frac{1}{i!}x(x-1)(x-2)\ldots(x-i+1) \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,m \tag{1}$$

i przyjmijmy

$$G(x)=-1-2G_1(x)-2^2G_2(x)-2^3G_3(x)-\ldots-2^mG_m(x). \tag{2}$$

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n liczba $G(n)+3^n$ jest całkowita i podzielna przez 2^{m+1}.

Na mocy rozwinięcia dwumianowego mamy

$$3^n=(1+2)^n=1+\binom{n}{1}\cdot 2+\binom{n}{2}\cdot 2^2+\ldots+\binom{n}{m}\cdot 2^m+t\cdot 2^{m+1}=$$
$$=1+2G_1(n)+2^2G_2(n)+\ldots+2^mG_m(n)+t\cdot 2^{m+1}=-G(n)+t\cdot 2^{m+1}$$

dla pewnej liczby całkowitej t. Zatem liczba $G(n)+3^n=t\cdot 2^{m+1}$ jest całkowita i podzielna przez 2^{m+1}.

Ze wzoru (1) wynika natychmiast, że wielomian $i!G_i(x)$ dla $i=1,2,\ldots,m$ ma współczynniki całkowite. Liczba $i!$ nie jest podzielna przez 2^i — by to zobaczyć, zauważmy, że gdy $2^k\leqslant i<2^{k+1}$, to najwyższa potęga 2^a dzieląca liczbę $i!$ ma wykładnik

$$a=\left[\frac{i}{2}\right]+\left[\frac{i}{2^2}\right]+\left[\frac{i}{2^3}\right]+\ldots+\left[\frac{i}{2^k}\right]\leqslant\frac{i}{2}+\frac{i}{2^2}+\frac{i}{2^3}+\ldots+\frac{i}{2^k}=i\left(1-\frac{1}{2^k}\right)<i.$$

Wobec tego współczynniki wielomianu $2^iG_i(x)$, zapisane w postaci nieskracalnej, są liczbami wymiernymi o nieparzystych mianownikach. Na mocy wzoru (2) to samo można więc powiedzieć o wielomianie $G(x)$. Istnieje więc taka liczba całkowita nieparzysta r, że wielomian $rG(x)$ ma współczynniki całkowite. Ponadto możemy dobrać taką liczbę całkowitą s, że $rs\equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$. Przyjmijmy

$$H(x)=rsG(x).$$

Z określenia liczby r widzimy, że wielomian $H(x)$ ma współczynniki całkowite. Ponadto dla dowolnej liczby $n\geqslant 0$ mamy

$$H(n)+3^n=rsG(n)+3^n=G(n)+3^n+(rs-1)G(n),$$

co oznacza, że liczba $H(n)+3^n$ jest podzielna przez 2^{m+1}.

By dokończyć rozwiązanie, połóżmy

$$W(x)=H(x)+2^m$$

i zauważmy, że wówczas dla $n=0,1,2,\ldots$ liczba $a_n=W(n)$ jest podzielna przez 2^m i nie jest podzielna przez 2^{m+1}. Wobec tego 2^m jest największym wspólnym dzielnikiem parzystym liczb a_0, a_1, a_2, ... Jak wynika z początkowej części rozwiązania, liczby te nie mają wspólnego dzielnika nieparzystego większego od 1. Zatem dla tego wielomianu $W(x)$ mamy $d=2^m$, co kończy rozwiązanie.

Pierwszy Mecz Matematyczny:

1. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę pierwszą p, że liczba

$$2^{120!}-1$$

jest podzielna przez p i nie jest podzielna przez p^2.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $p=127$.

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

Niech p będzie liczbą pierwszą, zaś x liczbą całkowitą. Przypuśćmy, że

$$p|x-1 \qquad \text{oraz} \qquad p^2 \not| x-1.$$

Wówczas dla każdej liczby całkowitej dodatniej m zachodzi równoważność

$$p^2|x^m-1 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad p|m.$$

Dowód lematu

Napiszmy $x=kp+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p. Wówczas na podstawie wzoru dwumianowego otrzymujemy

$$x^m=(kp+1)^m=k^mp^m+\binom{m}{1}k^{m-1}p^{m-1}+\ldots+\binom{m}{2}k^2p^2+\binom{m}{1}kp+1.$$

Widzimy, że wszystkie wyrazy z wyjątkiem dwóch ostatnich są podzielne przez p^2 dla dowolnej wartości m. Wobec tego

$$x^m-1\equiv mkp \pmod{p^2},$$

skąd łatwo wynika teza lematu.

Przechodzimy teraz do rozwiązania zadania. Dla każdej liczby pierwszej $p\leqslant 120$ liczba $120!$ jest oczywiście podzielna przez $(p-1)p$. Na mocy małego twierdzenia Fermata liczba $2^{p-1}-1$ jest podzielna przez p. Stosując zatem lemat dla $x=2^{p-1}$ dochodzimy do wniosku, że $p^2|2^{120!}-1$.

Najmniejszą liczbą pierwszą większą od 120 jest liczba 127. Aby więc dokończyć rozwiązanie, wykażemy, że

$$(1) \qquad 127|2^{120!}-1, \qquad 127^2 \not| 2^{120!}-1.$$

Jeżeli w lemacie przyjmiemy $x=2^7$, to liczba $x-1=127$ jest podzielna przez $p=127$. Ponadto liczba $120!$ podzielna przez 127 nie jest, więc przyjmując w lemacie wartość $m=\frac{1}{7}\cdot 120!$ widzimy, że podzielność $p^2|x^m-1=2^{120!}-1$ nie jest spełniona. To kończy dowód zależności (1) i rozwiązanie zadania.

2. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n\geqslant 1$, że liczba

$$n!+8$$

jest podzielna przez $2n+1$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $n=1,2,3,6$.

Przypuśćmy, że liczba $2n+1$ nie jest potęgą liczby pierwszej. Wówczas istnieje przedstawienie $2n+1=km$, gdzie $k,m>1$ są względnie pierwszymi (a więc różnymi) liczbami całkowitymi. Ponieważ liczba n jest nieparzysta, liczby k, m są nie mniejsze niż 3, a więc nie większe niż $\frac{1}{3}(2n+1) \leqslant \frac{1}{3}(2n+n) = n$. Stąd wynika, że liczba $n!$ jest podzielna przez iloczyn $km = 2n+1$. Jeżeli zatem n spełnia warunki zadania, to liczba 8 także musi być podzielna przez $2n+1$. Jest to oczywiście niemożliwe.

Przypuśćmy z kolei, że $2n+1 = p^k$, gdzie p jest liczbą pierwszą oraz $k \geqslant 2$. Wówczas $p \geqslant 3$ oraz $p \leqslant \frac{1}{3}p^k = \frac{1}{3}(2n+1) \leqslant n$, a więc $p|n!$. Gdyby zatem liczba n spełniała warunki zadania, to byłoby też $p|8$ i ponownie otrzymujemy sprzeczność.

Wobec tego liczba n może spełniać warunki zadania tylko w przypadku, gdy $2n+1 = p$ jest nieparzystą liczbą pierwszą. Załóżmy, że istotnie

$$n! \equiv -8 \pmod{p}.$$

Mamy wówczas

$$\begin{aligned}
64 = (-8)^2 \equiv [n!]^2 = \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 = \left[1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]^2 = \\
= 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-3}{2}\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = \\
= (-1)^{\frac{p-1}{4}}\left[1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\left(-\frac{p-1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{p-3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot(-2)\cdot(-1)\right] \equiv \\
\equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}}\left[1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p+3}{2}\cdot\ldots\cdot(p-2)\cdot(p-1)\right] = \\
= (-1)^{\frac{p-1}{4}}(p-1)! \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia Wilsona prawdziwa jest kongruencja $(p-1)! \equiv 1 \pmod{p}$, więc z wyprowadzonej zależności dostajemy

$$64 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p},$$

co oznacza, że liczba pierwsza p jest dzielnikiem jednej z liczb 63, 65. Stąd p jest jedną z liczb 3, 5, 7, 13, a odpowiednie wartości n są równe 1, 2, 3, 6. Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie one mają postulowaną własność:

$$1!+8 = 9 = 3\cdot 3, \quad 2!+8 = 10 = 5\cdot 2, \quad 3!+8 = 14 = 7\cdot 2, \quad 6!+8 = 728 = 13\cdot 56.$$

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{a^3+7abc} + \sqrt[3]{b^3+7abc} + \sqrt[3]{c^3+7abc} \leqslant 2(a+b+c).$$

Rozwiązanie

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wynika, że

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^3+7abc} + \sqrt{b^3+7abc} + \sqrt{c^3+7abc} = \\
= \sqrt{a(a^2+7bc)} + \sqrt{b(b^2+7ac)} + \sqrt{c(c^2+7ab)} \leqslant \\
\leqslant \sqrt{(a+b+c)[(a^2+7bc)+(b^2+7ac)+(c^2+7ab)]}.
\end{aligned}$$

Aby uzyskać składnik $\sqrt{a^3+7abc}$ ze składnika $\sqrt[3]{a^3+7abc}$, stosujemy nierówność Höldera z wykładnikiem $\frac{3}{2}$:

$$\sqrt[3]{a^3+7abc}+\sqrt[3]{b^3+7abc}+\sqrt[3]{c^3+7abc} \leqslant$$
$$\leqslant \left(1^3+1^3+1^3\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left(\sqrt[3]{a^3+7abc}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\sqrt[3]{b^3+7abc}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\sqrt[3]{c^3+7abc}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Otrzymujemy zatem

$$\left(\sqrt[3]{a^3+7abc}+\sqrt[3]{b^3+7abc}+\sqrt[3]{c^3+7abc}\right)^3 \leqslant$$
$$\leqslant 3\left(\sqrt{a^3+7abc}+\sqrt{b^3+7abc}+\sqrt{c^3+7abc}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 3(a+b+c)[(a^2+7bc)+(b^2+7ac)+(c^2+7ab)].$$

Korzystając z nierówności $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$ widzimy, że

$$(a^2+7bc)+(b^2+7ac)+(c^2+7ab) \leqslant \frac{8}{3}(a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab)=\frac{8}{3}(a+b+c)^2,$$

więc ostatecznie uzyskujemy

$$\left(\sqrt[3]{a^3+7abc}+\sqrt[3]{b^3+7abc}+\sqrt[3]{c^3+7abc}\right)^3 \leqslant 8(a+b+c)^3,$$

co dowodzi nierówności danej w treści zadania.

4. Dane są: liczba całkowita $n \geqslant 2$ i liczba rzeczywista a. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ układ równań

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=a \\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=a^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n=a^n \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jedna z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest równa a, pozostałe zaś 0.

Jest oczywiste, że wypisane wyżej rozwiązania istotnie spełniają dany układ. Udowodnimy, że są to jedyne rozwiązania. Możemy przy tym zakładać, że $a \neq 0$, gdyż dla $a=0$ z drugiego równania układu otrzymujemy natychmiast $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek $n=2$. Z równań $x_1+x_2=a$, $x_1^2+x_2^2=a^2$ otrzymujemy $0=(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)=2x_1x_2$. Zatem jedna z liczb x_1, x_2 jest równa 0, druga więc — na mocy pierwszego równania układu — musi być równa a.

Niech teraz $n \geqslant 3$ i załóżmy, że liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są rozwiązaniem układu. Z drugiego równania otrzymujemy

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_n}{a}\right)^2=1.$$

Wynika stąd, że liczby stojące w nawiasach należą do przedziału $\langle -1;1\rangle$. Dla liczb $t \in \langle -1;1\rangle$ spełniona jest nierówność $t^3 \leqslant t^2$, przy czym równość zachodzi tylko dla

$t=0$ i $t=1$. Wykorzystując teraz trzecie równanie układu widzimy, że

$$1=\left(\frac{x_1}{a}\right)^3+\left(\frac{x_2}{a}\right)^3+\ldots+\left(\frac{x_n}{a}\right)^3\leqslant\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_n}{a}\right)^2=1.$$

Wobec tego każda z liczb $\frac{x_1}{a}$, $\frac{x_2}{a}$, ..., $\frac{x_n}{a}$ jest równa 0 lub 1. Ponadto suma tych liczb jest równa 1. Zatem wskazane na początku rozwiązania układu są jedynymi jego rozwiązaniami.

5. Dane są różne liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n $(n\geqslant 2)$. Określamy wielomian W wzorem

$$W(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n).$$

Niech $W_i(x)$ będzie ilorazem z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x-x_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$. Dowieść, że

$$\frac{x_1^n}{W_1(x_1)}+\frac{x_2^n}{W_2(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^n}{W_n(x_n)}=x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

Rozwiązanie

Rozpatrzmy wielomian G określony wzorem

$$G(x)=-x^n+\frac{x_1^n}{W_1(x_1)}W_1(x)+\frac{x_2^n}{W_2(x_2)}W_2(x)+\ldots+\frac{x_n^n}{W_n(x_n)}W_n(x).$$

Ponieważ dla $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ liczba x_i jest pierwiastkiem każdego z wielomianów W_1, ..., W_{i-1}, W_{i+1}, ..., W_n, zatem

$$G(x_i)=-x_i^n+\frac{x_i^n}{W_i(x_i)}W_i(x_i)=-x_i^n+x_i^n=0.$$

Wobec tego liczby x_1, x_2, ..., x_n są pierwiastkami wielomianu $G(x)$, który ma stopień n, a jego współczynnik przy potędze x^n jest równy -1. Stąd wynika zależność $G(x)\equiv -W(x)$. W szczególności ze wzorów Viete'a wynika, że współczynnik przy x^{n-1} w wielomianie $G(x)$ jest równy $x_1+x_2+\ldots+x_n$.

Z drugiej strony, W_1, W_2, ..., W_n są wielomianami unormowanymi stopnia $n-1$. Zatem ze wzoru określającego wielomian $G(x)$ wnosimy, że jego współczynnik przy x^{n-1} wynosi

$$\frac{x_1^n}{W_1(x_1)}+\frac{x_2^n}{W_2(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^n}{W_n(x_n)}.$$

6. Dana jest prostokątna tabela $m\times n$ (gdzie $m,n\geqslant 3$). W każdej kratce brzegowej (tzn. mającej wspólny bok z brzegiem tabeli) napisana jest liczba rzeczywista. Dowieść, że istnieje co najwyżej jeden taki sposób wpisania liczb rzeczywistych do pozostałych kratek, że liczba w dowolnej niebrzegowej kratce jest średnią arytmetyczną liczb znajdujących się w czterech sąsiednich kratkach.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że wypełniamy kratki tabeli $m\times n$ na dwa sposoby: liczbami $a_{i,j}$ ($i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$) oraz liczbami $b_{i,j}$ ($i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$), przy czym liczby w brzegowych kratkach tabeli są takie same, tzn.

$$\begin{aligned} &a_{1,j}=b_{1,j}, \quad a_{m,j}=b_{m,j} \qquad \text{dla } j=1,\ldots,n,\\ &a_{i,1}=b_{i,1}, \quad a_{i,n}=b_{i,n} \qquad \text{dla } i=1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{1}$$

oraz w obu sposobach wypełnień liczba w dowolnej niebrzegowej kratce jest średnią arytmetyczną liczb znajdujących się w czterech sąsiednich kratkach, czyli

$$a_{i,j}=\frac{a_{i-1,j}+a_{i+1,j}+a_{i,j-1}+a_{i,j+1}}{4} \qquad \text{dla } i=2,\ldots,m-1,\ j=2,\ldots,n-1.$$

Połóżmy $c_{i,j}=a_{i,j}-b_{i,j}$ i rozważmy tabelę $m\times n$ wypełnioną liczbami $c_{i,j}$ ($i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$). Na mocy zależności (1) w brzegowych kratkach tej tabeli stoją zera:

$$\begin{aligned} c_{1,j}=c_{m,j}=0 &\qquad \text{dla } j=1,\ldots,n,\\ c_{i,1}=c_{i,n}=0 &\qquad \text{dla } i=1,\ldots,m. \end{aligned}$$

Ponadto warunek związany ze średnią arytmetyczną jest również spełniony, co wynika z przeliczenia

$$\begin{aligned} c_{i,j}=a_{i,j}-b_{i,j}&=\frac{a_{i-1,j}+a_{i+1,j}+a_{i,j-1}+a_{i,j+1}}{4}-\frac{b_{i-1,j}+b_{i+1,j}+b_{i,j-1}+b_{i,j+1}}{4}=\\ &=\frac{a_{i-1,j}-b_{i-1,j}}{4}+\frac{a_{i+1,j}-b_{i+1,j}}{4}+\frac{a_{i,j-1}-b_{i,j-1}}{4}+\frac{a_{i,j+1}-b_{i,j+1}}{4}=\\ &=c_{i-1,j}+c_{i+1,j}+c_{i,j-1}+c_{i,j+1}. \end{aligned}$$

Tezą zadania jest równość $a_{i,j}=b_{i,j}$, czyli $c_{i,j}=0$ ($i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$). Innymi słowy, sprowadziliśmy zadanie do wykazania, że jeżeli w każdej brzegowej kratce tablicy wpisana jest liczba 0, to jedynym dopuszczalnym sposobem wypełnienia pozostałych kratek jest wpisanie samych zer.

Załóżmy więc wbrew tej tezie, że w tabeli istnieją liczby różne od 0. Spośród wszystkich takich liczb wybierzmy liczbę o największej wartości bezwzględnej (powiedzmy M), a następnie spośrod nich wybierzmy tę liczbę $c_{i,j}$, dla której wartość wskaźnika i jest najmniejsza. Możemy oczywiście zakładać, że $M>0$ (w przeciwnym razie zmienimy znaki wszystkich liczb w tablicy). Ponieważ $1<i<m$ oraz $1<j<n$ (gdyż w brzegowych kratkach tabeli wpisane są zera), więc liczba $c_{i,j}$ jest średnią arytmetyczną czterech liczb sąsiednich: $c_{i-1,j}$, $c_{i+1,j}$, $c_{i,j-1}$, $c_{i,j+1}$. Z określenia liczby M wynika, że te cztery liczby nie przekraczają M. Ich średnia arytmetyczna wynosi M, zatem w istocie wszystkie one są równe M. W szczególności $c_{i-1,j}=M$, co jest sprzeczne z minimalnością wskaźnika i. Zatem w tabeli znajdują się same zera, a tego dowodziliśmy.

7. Różne liczby całkowite dodatnie c_1, c_2, ..., c_n spełniają warunek

$$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\ldots+\frac{1}{c_n}\geqslant 2.$$

Dowieść, że istnieją dwa różne niepuste zbiory A, $B\subseteq\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$, dla których $\sum\limits_{x\in A}x=\sum\limits_{y\in B}y$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania jest nieprawdziwa.

Wybierzmy dowolną wartość $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Ponieważ istnieje 2^i-1 różnych niepustych podzbiorów zbioru $\{c_1,c_2,\ldots,c_i\}$ i wszystkie te podzbiory mają różne sumy elementów, więc największa z tych sum, czyli $c_1+c_2+\ldots+c_i$, jest nie mniejsza niż 2^i-1.

Zastosujmy teraz przekształcenie Abela. Przyjmijmy mianowicie $a_i=\dfrac{1}{2^{i-1}c_i}$, $b_i=c_i-2^{i-1}$ dla $i=1,2,\ldots,n$ i napiszmy

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{2^{i-1}}-\frac{1}{c_i}\Big)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})(b_1+b_2+\ldots+b_i)+a_n\sum_{i=1}^{n}b_i. \tag{1}$$

Badając składniki prawej strony wzoru (1) widzimy, że $a_i>a_{i+1}$ (jest to równoważne nierówności $2^{i-1}c_i<2^ic_{i+1}$, która wynika wprost z założenia $c_i<c_{i+1}$) oraz

$$b_1+b_2+\ldots+b_i=c_1+c_2+\ldots+c_i-1-2-2^2-\ldots-2^{i-1}=c_1+c_2+\ldots+c_i-(2^i-1)\geqslant 0$$

na mocy poczynionej wcześniej uwagi. Zatem prawa strona wyrażenia (1) jest nieujemna. Stąd dostajemy

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{2^{i-1}}-\frac{1}{c_i}\Big)\geqslant 0,\quad\text{czyli}\quad \frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\ldots+\frac{1}{c_n}\leqslant\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

Otrzymana sprzeczność z warunkami zadania kończy rozwiązanie.

8. Dany jest kąt wypukły o wierzchołku R. Punkty A i B leżą na różnych ramionach, zaś punkt C leży wewnątrz tego kąta. Posługując się jedynie linijką skonstruować takie punkty P i Q leżące odpowiednio na ramionach RB i RA danego kąta, że punkt C leży na odcinku PQ oraz odcinki AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Wskażemy najpierw dwie pomocnicze konstrukcje.

Konstrukcja 1

Dany jest odcinek AB oraz prosta l równoległa do AB. Skonstruować samą linijką środek odcinka AB.

Rozwiązanie

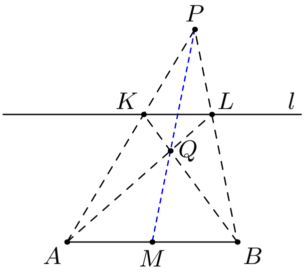
Wybierzmy punkt P nie leżący pomiędzy prostymi AB i l (zob. rys. 16). Łączymy punkt P prostymi z punktami A i B otrzymując punkty K i L. Niech odcinki AL i BK przecinają się w punkcie Q. Wówczas punkt M przecięcia prostych PQ i AB jest środkiem odcinka AB. Istotnie, z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{BL}{LP}=\frac{AK}{KP}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{BL}{LP}\cdot\frac{PK}{KA}=1,$$

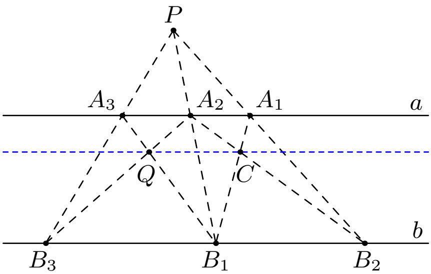
a z drugiej strony twierdzenie Cevy daje

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BL}{LP}\cdot\frac{PK}{KA}=1,$$

więc zachodzi równość $AM=MB$.



rys. 16



rys. 17

Konstrukcja 2

Dane są równoległe proste a i b oraz punkt C. Skonstruować samą linijką prostą przechodzącą przez punkt C równoległą do prostych a i b.

Rozwiązanie

Przez punkt C prowadzimy dwie proste przecinające proste a i b odpowiednio w punktach A_1 i B_1; A_2 i B_2 (zob. rys. 17). Niech proste A_1B_2 i A_2B_1 przecinają się w punkcie P. Przez punkt P prowadzimy prostą przecinającą proste a i b odpowiednio w punktach A_3 i B_3. Niech odcinki A_2B_3 i A_3B_1 przecinają się w punkcie Q. Wówczas CQ jest szukaną prostą równoległą. Poprawność tej konstrukcji wynika z prostego przeliczenia

$$\frac{d(Q,a)}{d(Q,b)}=\frac{A_3A_2}{B_3B_1}=\frac{A_2A_1}{B_1B_2}=\frac{d(C,a)}{d(C,b)},$$

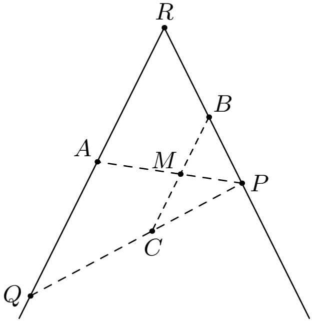
z którego wynika $d(Q,a)=d(C,a)$, a więc $QC\parallel a$.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Rozpatrzmy dwa przypadki:

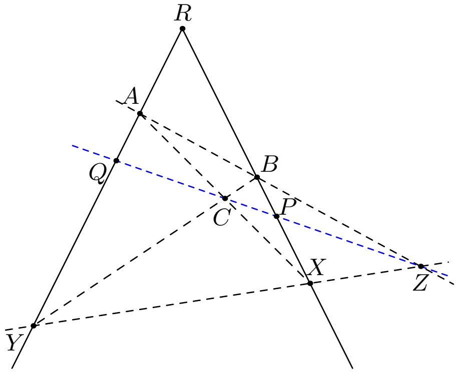
(1) $BC\parallel AR$.

Zauważmy, że na mocy rozumowania identycznego z rozumowaniem dowodzącym poprawności konstrukcji 1 punkt A musi być środkiem odcinka RQ. Wobec tego konstrukcja punktów P i Q jest następująca: Przy pomocy konstrukcji 1 znajdujemy środek M odcinka BC (zob. rys. 18), a następnie P określamy jako punkt przecięcia prostych AM i BR (jeżeli te proste są równoległe, zadanie nie ma rozwiązania), zaś punkt Q określamy jako punkt przecięcia prostych PC i RA. Stosując twierdzenie Cevy tak jak w konstrukcji 1 widzimy, że odcinki AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

Analogicznie postępujemy w przypadku $AC \parallel BR$.



rys. 18



rys. 19

(2) $BC \nparallel AR$ oraz $AC \nparallel BR$.

Wyznaczmy punkt X przecięcia prostych AC i BR oraz punkt Y przecięcia prostych BC i AR (zob. rys. 19).

Jeżeli proste AB i XY są równoległe, to przy pomocy konstrukcji 2 prowadzimy przez punkt C prostą równoległa do prostej AB. Otrzymane jako punkty przecięcia tej prostej z ramionami danego kąta punkty Q i P spełniają warunki zadania.

Jeżeli natomiast proste AB i XY przecinają się w punkcie Z, to poprowadźmy przez punkty Z i C prostą, która przetnie ramiona RA i RB odpowiednio w punktach Q i P. Trójkąty ABC i PQR mają oś perspektywiczną (gdyż punkty $Z = AB \cap PQ$, $Y = BC \cap QR$, $X = CA \cap RP$ leżą na jednej prostej), więc na podstawie twierdzenia Desargues'a mają też środek perspektywiczny — którym musi być punkt przecięcia prostych AP, BQ i CR. To kończy konstrukcję.

9. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP = CR$.

Rozwiązanie

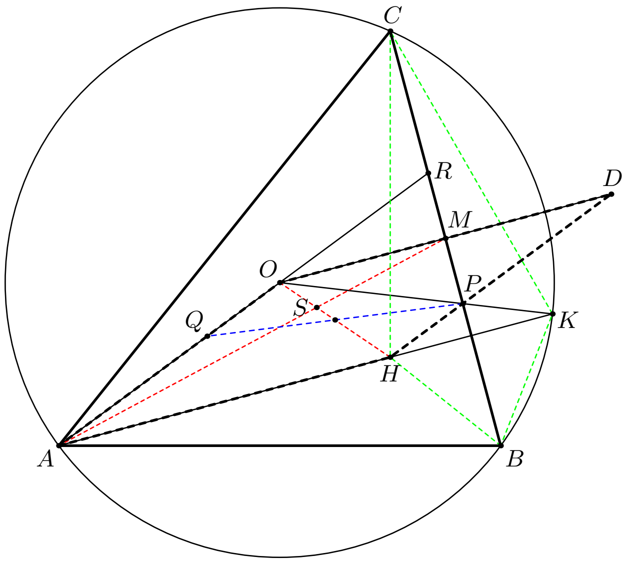
Sposób I

Zauważmy najpierw, że punkty K i H są symetryczne względem prostej BC.

Wynika to z równości (zob. rys. 20)

$$\sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle HBC - \sphericalangle HCB = 180^\circ - (90^\circ - \sphericalangle C) - (90^\circ - \sphericalangle B) =$$
$$= \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle A = \sphericalangle BKC.$$

Niech D będzie punktem symetrycznym do punktu O względem prostej BC. Wówczas P jest punktem przecięcia prostych DH i BC.



rys. 20

Jednokładność o skali $-\frac{1}{2}$ i środku w punkcie S, który jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, przekształca punkt A na środek M boku BC oraz punkt H na punkt O. Wynika stąd równość $OM = \frac{1}{2}AH$, co w efekcie daje $OD = AH$. Ponadto proste AH i OM są równoległe, więc czworokąt $AHDO$ jest równoległobokiem. Stąd wniosek, że symetria względem środka odcinka OH przeprowadza odcinek DH, zawierający punkt P, na odcinek AO. W efekcie proste AQ i AO pokrywają się.

Trójkąt POR jest równoramienny, gdyż

$$\sphericalangle OPR = \sphericalangle DPR = \sphericalangle BPH = \sphericalangle PRA = \sphericalangle PRO.$$

Zatem z prostopadłości $OM \perp BC$ otrzymujemy, że punkt M jest środkiem odcinka PR. Wynika stąd teza zadania.

Sposób II

Rozpatrzmy elipsę e o ogniskach O i H wpisaną w trójkąt ABC. Taka elipsa istnieje, gdyż zachodzą równości

$$\sphericalangle HCA = 90^\circ - \sphericalangle A = \sphericalangle OCB,$$
$$\sphericalangle HAB = 90^\circ - \sphericalangle B = \sphericalangle OAC,$$
$$\sphericalangle HBC = 90^\circ - \sphericalangle C = \sphericalangle OBA,$$

tzn. punkty O i H są izogonalnie sprzężone. Tak jak w sposobie I dowodzimy, że punkty H i K są symetryczne względem prostej BC. Wobec tego punkt K jest symetryczny do ogniska H elipsy e względem prostej BC stycznej do tej elipsy. Zatem na mocy własności elipsy prosta łącząca punkt K z drugim ogniskiem elipsy e, punktem O, jest punktem styczności elipsy e do boku BC. Innymi słowy, punkt P jest punktem styczności elipsy e do boku BC.

Rozpatrzmy teraz środek F odcinka OH. Punkt ten jest oczywiście środkiem symetrii elipsy e, toteż punkt Q symetryczny do punktu P względem punktu F leży na elipsie e. Ponadto z uwagi na symetrię prosta styczna do elipsy e w punkcie Q jest równoległa do prostej BC.

Wykonajmy teraz przekształcenie afiniczne przekształcające elipsę e w okrąg o. Niech X' oznacza obraz punktu X przy tym przekształceniu. Punkty B, P, C, R leżą na jednej prostej, więc równości $BP = CR$ oraz $B'P' = C'R'$ są równoważne. Do zakończenia rozwiązania pozostaje więc udowodnić drugą z tych równości.

Przekształcenie afiniczne zachowuje równoległość prostych, zatem prosta styczna do okręgu o przechodząca przez punkt Q' jest równoległa do prostej $B'C'$. Ponadto punkty A', Q', R' leżą na jednej prostej. Rozpatrując jednokładność o środku w punkcie A przeprowadzającą punkt Q na R widzimy, że przeprowadza ona okrąg o na okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny do boku BC. Wystarczy więc już tylko zauważyć, że skoro na boku $B'C'$ punkt R' jest punktem styczności okręgu dopisanego do trójkąta, a punkt P' jest punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt $A'B'C'$, to zachodzi równość $B'P' = C'R'$, a tego dowodziliśmy.

10. Różne punkty M, S, T leżą na okręgu o środku w punkcie O. Styczne do tego okręgu w punktach S i T przecinają się w punkcie A. Punkt P jest punktem przecięcia prostej AM i prostej prostopadłej do prostej MO przechodzącej przez punkt S. Dowieść, że punkt symetryczny do punktu S względem punktu P leży na prostej MT.

Rozwiązanie

Niech K będzie punktem przecięcia prostych MT i PS (proste te nie są równoległe, gdyż prostą równoległa do prostej PS przechodzącą przez punkt M jest styczna do tego okręgu, a odcinek MT jest cięciwą). Ponieważ punkty M, S, T nie mogą leżeć na jednej prostej, więc punkty K i S są różne. W związku z tym teza zadania jest równoważna równości $PK = PS$.

Rozważmy dwustosunek $(S,K;P,\infty)$, gdzie ∞ oznacza punkt z horyzontu należący do prostej PS. Równość $PK=PS$ sprowadza się do udowodnienia, że dwustosunek ten jest równy 1, czyli że punkty $S,K;P,\infty$ są sprzężone harmonicznie. Weźmy pod uwagę rzutowanie tego dwustosunku przez punkt M (leżący poza prostą PS) na prostą ST (na której nie leży punkt M). Przy tym rzucie punkt S przejdzie na siebie, punkt K przejdzie na punkt T, punkt P przejdzie na punkt R przecięcia prostych AM i ST, natomiast punkt ∞ przejdzie na punkt L przecięcia prostej ST z prostą równoległą do prostej PS przechodzącą przez punkt M, czyli styczną do danego okręgu w punkcie M. (Jeżeli punkt M jest środkiem łuku ST, to punkt L będzie punktem z horyzontu należącym do prostej ST, ale nie zmienia to poprawności dalszych rozważań.)

Ponieważ rzuty zachowują wartości dwustosunków, więc pozostaje do udowodnienia równość $(L,R;S,T)=1$. Zauważmy w tym celu, że prosta ST jest biegunową punktu A względem danego okręgu, gdyż przechodzi ona przez punkty styczności prostych stycznych do okręgu poprowadzonych z punktu A. Punkt L leży zatem na biegunowej punktu A. Wobec tego punkt A leży na biegunowej punktu L. Oczywiście na biegunowej punktu L względem danego okręgu leży także punkt M (gdyż jest to punkt styczności prostej stycznej do okręgu poprowadzonej z punktu L). To oznacza, że prosta AM jest biegunową punktu L.

Punkty S i T są punktami przecięcia prostej przechodzącej przez punkt L z danym okręgiem, zaś punkt R należy do biegunowej punktu L. Stąd wynika, że punkty $L,R;S,T$ są sprzężone harmonicznie, a to na mocy wcześniejszych spostrzeżeń kończy rozwiązanie.

11. W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności

$$\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{[ABD]}{[ABC]}=\lambda.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości λ.

Rozwiązanie

Odpowiedź: λ może być dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią.

Niech $\lambda>0$ będzie dowolną liczbą i weźmy pod uwagę dowolny trójkąt $AC'D'$, w którym

$$\frac{AD'}{AC'}=\lambda.$$

Niech ponadto dwusieczna kąta $\sphericalangle C'AD'$ przecina odcinek $C'D'$ w punkcie B. Wówczas z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{[ABD']}{[ABC']}=\frac{BD'}{BC'}=\frac{AD'}{AC'}=\lambda.$$

Zatem dowolny czworościan $ABCD$, którego ściany ABC i ABD są przystające odpowiednio do trójkątów $AB'C'$ i $AB'D'$, spełnia warunki zadania.

Drugi Mecz Matematyczny:

1. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniają warunek
$$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2.$$
Udowodnić, że liczba $a+b+c+d$ jest złożona.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania jest nieprawdziwa. Wówczas $p=a+b+c+d$ jest liczbą pierwszą.

Mnożąc dane w treści zadania równanie przez 2 otrzymujemy
$$a^2+b^2+(a+b)^2=c^2+d^2+(c+d)^2. \tag{1}$$
Suma liczb $a+b$ i $c+d$ jest równa p, więc ich kwadraty dają te same reszty z dzielenia przez p. Wobec tego na mocy (1) dostajemy
$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &\equiv c^2+d^2 \pmod p,\\
a^2-c^2 &\equiv d^2-b^2 \pmod p,\\
(a-c)(a+c) &\equiv (d-b)(d+b) \pmod p,\\
(a-c)(a+c) &\equiv (d-b)[p-(a+c)] \pmod p,\\
(a-c)(a+c) &\equiv (b-d)(a+c) \pmod p.
\end{aligned}$$
Liczba p jest pierwsza oraz $0<a+c<p$. Zatem z powyższej zależności wynika, że liczby $a-c$ i $b-d$ dają te same reszty z dzielenia przez p, a więc są równe (gdyż ich różnica spełnia oszacowanie $|(a-c)-(b-d)|<a+b+c+d=p$). Z równości $a-c=b-d$ wynika jednak, że $a+d=b+c$ oraz $p=2(a+d)$. To oznacza, że $p\geqslant 4$ jest parzystą liczbą pierwszą. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy.

2. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1000}$ niepodzielne przez 7, 11 ani 13. Dowieść, że można tak dobrać znaki w wyrażeniu
$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_{1000}\,,$$
aby w wyniku otrzymać liczbę podzielną przez 1001.

Rozwiązanie

Niech n^* oznacza resztę z dzielenia liczby n przez 1001.

Skorzystamy z następującego lematu, którego dowód pozostawiamy Czytelnikowi:

Lemat

Niech Z będzie dowolnym niepustym podzbiorem zbioru $\{0,1,2,\ldots,1000\}$, a n liczbą całkowitą względnie pierwszą z 1001. Wówczas
$$Z=\{(z+n)^*: z\in Z\}$$
wtedy i tylko wtedy, gdy
$$Z=\{0,1,2,\ldots,1000\}\,.$$

Dla $i=1,2,3,\ldots,1000$ oznaczmy przez Z_i zbiór wszystkich liczb postaci

$$(\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_i)^*\,.$$

Wówczas zbiór $Z_1=\{a_1^*,\,(-a_1)^*\}$ ma dwa elementy.

Udowodnimy indukcyjnie, że zbiór Z_i ma co najmniej $i{+}1$ elementów.

Krok indukcyjny jest następujący.

Jeżeli zbiór Z_i ma 1001 elementów, to

$$Z_i=Z_{i+1}=\ldots=Z_{1000}=\{0,1,2,\ldots,1000\}\,.$$

Jeżeli natomiast zbiór Z_i ma mniej niż 1001 elementów, to na mocy lematu zbiory

$$\{(z+a_{i+1})^*: z\in Z_i\}$$

oraz

$$\{(z-a_{i+1})^*: z\in Z_i\}$$

są różne i wówczas zbiór Z_{i+1} będący ich sumą ma więcej elementów niż zbiór Z_i.

W obu przypadkach, jeżeli zbiór Z_i ma co najmniej $i{+}1$ elementów, to Z_{i+1} ma co najmniej $i{+}2$ elementy.

Tak więc zbiór Z_{1000} ma 1001 elementów, skąd wynika $0\in Z_{1000}$, co jest równoważne tezie zadania.

3. Liczby dodatnie x_1, x_2, …, x_n spełniają warunek

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}.$$

Dowieść, że

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\ldots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że

$$y_1+y_2+\ldots+y_n>1, \qquad \text{gdzie } y_i=\frac{1}{n-1+x_i} \quad \text{dla } 1\leqslant i\leqslant n.$$

Prostym rachunkiem sprawdzamy zależność

$$x_iy_i=1-(n-1)y_i.$$

Otrzymujemy stąd

$$(1)\qquad \begin{aligned}(n-1)y_i>(n-1)\Big(y_i+1-\sum_{k=1}^{n}y_k\Big)&=(n-1)y_i-1+\sum_{k=1}^{n}(1-(n-1)y_k)=\\ &=-x_iy_i+\sum_{k=1}^{n}x_ky_k,\end{aligned}$$

co prowadzi do nierówności

$$\text{(2)} \qquad \frac{n-1}{x_i} > -1 + \frac{1}{x_i y_i}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,n.$$

Sumując nierówności (2) stronami widzimy, że

$$(n-1)\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\Big) > -n + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i y_i}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i y_i}\Big) - \frac{1}{x_k y_k}\Big).$$

Jednakże na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną oraz zależności (1) uzyskujemy

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i y_i}\Big) - \frac{1}{x_k y_k} &= \frac{1}{x_1 y_1} + \ldots + \frac{1}{x_{k-1}y_{k-1}} + \frac{1}{x_{k+1}y_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{x_n y_n} \geqslant \\ &\geqslant \frac{(n-1)^2}{x_1 y_1 + \ldots + x_{k-1}y_{k-1} + x_{k+1}y_{k+1} + \ldots + x_n y_n} = \\ &= \frac{(n-1)^2}{\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big) - x_k y_k} > \frac{(n-1)^2}{(n-1)y_k} = \frac{n-1}{y_k},\end{aligned}$$

co pozwala napisać

$$\begin{aligned}(n-1)\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\Big) &> \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i y_i}\Big) - \frac{1}{x_k y_k}\Big) > \\ &> \sum_{k=1}^{n}(n-1)x_k = (n-1)(x_1+x_2+\ldots+x_n).\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy nierówność sprzeczną z założeniami zadania. Tym samym rozwiązanie zostało zakończone.

4. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $p=4n+1$ jest liczbą pierwszą. Udowodnić, że

$$\big[\sqrt{p}\,\big] + \big[\sqrt{2p}\,\big] + \ldots + \big[\sqrt{np}\,\big] = \frac{p^2-1}{12}$$

(gdzie symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x).

Rozwiązanie

Rozpatrzmy funkcję $f:\langle 0;n\rangle \to \langle 0;\sqrt{np}\rangle$ zadaną wzorem $f(x)=\sqrt{xp}$. Wówczas dla każdej liczby całkowitej dodatniej k liczba $[\sqrt{kp}]$ jest liczbą punktów na płaszczyźnie o pierwszej współrzędnej równej k i drugiej współrzędnej całkowitej dodatniej nie przekraczającej $f(k)$. Zatem suma dana w treści zadania jest liczbą punktów kratowych (tzn. o obu współrzędnych całkowitych) o odciętych w przedziale $\langle 1;n\rangle$ i leżących nad osią odciętych, a poniżej wykresu funkcji f.

Obliczymy teraz w inny sposób liczbę tych punktów kratowych. Ponieważ f jest funkcją rosnącą oraz $f(n)=\sqrt{np}=\sqrt{n(4n+1)}<2n+1$, więc wszystkie rozważane punkty kratowe leżą w prostokącie ograniczonym prostymi $y=1$, $y=2n$, $x=1$, $x=n$. Liczba wszystkich punktów kratowych w tym prostokącie jest oczywiście równa $2n^2$, więc wystarczy wyznaczyć liczbę punktów kratowych w tym prostokącie leżących nad wykresem funkcji f (zauważmy przy tym, iż żaden punkt kratowy tego prostokąta nie należy do wykresu, gdyż dla $k=1,2,\ldots,n$ liczba kp jest podzielna przez p i nie jest podzielna przez p^2, zatem liczba $f(k)=\sqrt{kp}$ jest niewymierna).

Liczba punktów kratowych rozpatrywanego prostokąta leżących nad wykresem funkcji f jest równa liczbie punktów kratowych prostokąta ograniczonego prostymi $y=1$, $y=n$, $x=1$, $x=2n$ leżących pod wykresem funkcji odwrotnej do funkcji f, czyli funkcji $g(x)=x^2/p$. Ta ostatnia liczba jest równa

$$W=\left[\frac{1^2}{p}\right]+\left[\frac{2^2}{p}\right]+\left[\frac{3^2}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(2n)^2}{p}\right].$$

Niech r_i będzie resztą z dzielenia liczby i^2 przez p dla $i=1,2,\ldots,2n$. Wówczas

$$\begin{aligned}W&=\frac{1^2-r_1}{p}+\frac{2^2-r_2}{p}+\frac{3^2-r_3}{p}+\ldots+\frac{(2n)^2-r_{2n}}{p}=\\&=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n)^2}{p}-\frac{r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{2n}}{p}.\end{aligned}$$

Obliczamy, że

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n)^2}{p}=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6p}=\frac{n(2n+1)}{3}.$$

Wykażemy z kolei, że

$$r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{2n}=np. \tag{1}$$

Wówczas na mocy dotychczasowych rozważań otrzymamy

$$2n^2-W=2n^2-\frac{n(2n+1)}{3}+n=\frac{2n(2n+1)}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}=\frac{p^2-1}{12},$$

skąd wyniknie teza zadania, gdyż, jak już wiemy, dana w treści zadania liczba wynosi $2n^2-W$.

Pozostaje więc dowód równości (1). Zauważmy przede wszystkim, że reszty r_1, r_2, …, r_{2n} są różne — gdyby bowiem było $r_i=r_j$, gdzie $1\leqslant i<j\leqslant 2n$, to różnica $j^2-i^2=(j-i)(j+i)$ byłaby podzielna przez liczbę pierwszą $p=4n+1$. Ale żaden z czynników nie jest podzielny przez p: mamy $0<j-i<j+i\leqslant 4n-1<p$. Z drugiej strony, liczby k^2 i $(4n+1-k)^2$ dają te same reszty z dzielenia przez p. Wobec tego zbiór $R=\{r_1,r_2,\ldots,r_{2n}\}$ jest zbiorem wszystkich niezerowych reszt, jakie mogą dawać kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez p (reszt kwadratowych).

Iloczyn (mod p) dwóch reszt kwadratowych jest oczywiście resztą kwadratową. Ponieważ p jest liczbą pierwszą spełniającą $p \equiv 1 \pmod 4$, więc liczba -1 jest resztą kwadratową. Stąd wniosek, że reszty należące do zbioru R można połączyć w pary $(r, p-r)$. Ponieważ reszt tych jest $2n$, więc ich suma jest równa np, co kończy dowód wzoru (1).

5. Dane są liczby rzeczywiste $a < b$, $0 < p < q < 1$. Dowieść, że istnieje taki wielomian W o współczynnikach całkowitych, że

$$W(x) \in \langle a; b \rangle \qquad \text{dla każdego } x \in \langle p; q \rangle.$$

Rozwiązanie

Udowodnimy, że dla pewnej liczby całkowitej m i liczby pierwszej n wielomian

$$W(x) = \frac{m}{n}\Big(1 - x^n - (1-x)^n\Big)$$

spełnia warunki zadania. Zauważmy przede wszystkim, że współczynniki każdego takiego wielomianu są całkowite, gdyż

$$1 - x^n - (1-x)^n = \binom{n}{1}x - \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n-1}x^{n-1},$$

a współczynniki dwumianowe $\binom{n}{i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ są podzielne przez liczbę pierwszą n.

Oznaczmy $\delta = \min\{p, 1-q\}$. Wtedy $\langle p; q \rangle \subseteq \langle \delta; 1-\delta \rangle$. Dla dowolnej liczby $r \in (0,1)$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, więc istnieje nieparzysta liczba pierwsza n, dla której

$$\frac{1}{n} < \frac{b-a}{4} \qquad \text{oraz} \qquad (1-\delta)^n < \frac{b-a}{8 \cdot \max\{|a|, |b|\}}.$$

Istnieje ponadto taka liczba całkowita m że

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{4}.$$

Wówczas dla $x \in \langle \delta; 1-\delta \rangle$ otrzymujemy

$$\left|W(x) - \frac{m}{n}\right| = \left|\frac{m}{n}\right| \cdot \left|-x^q - (1-x)^q\right| \leqslant \left|\frac{m}{n}\right| \cdot 2(1-\delta)^n < \frac{|\frac{m}{n}|}{\max\{|a|, |b|\}} \cdot \frac{b-a}{4} < \frac{b-a}{4},$$

co w połączeniu z poprzednią nierównością daje $\left|W(x) - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$, a więc uzyskujemy $W(x) \in \langle a; b \rangle$.

6. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieją takie liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, b$ oraz takie liczby całkowite $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n+1}$ nie mniejsze od $2n$, że

$$\mathrm{NWD}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, b) = 1$$

oraz

$$a_1^{k_1} + a_2^{k_2} + a_3^{k_3} + \ldots + a_{n+1}^{k_{n+1}} = b^{2n}\,.$$

Rozwiązanie

Niech

$$b = x+1, \quad a_{n+1} = x-1, \quad k_{n+1} = 2n\,.$$

Wówczas

$$b^{2n} - a_{n+1}^{k_{n+1}} = (x+1)^{2n} - (x-1)^{2n} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\binom{2n}{2i-1}\cdot x^{2i-1}\,.$$

Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ będą różnymi liczbami pierwszymi większymi od $2n$.

Wówczas istnieje taka liczba dodatnia parzysta x, że dla $i = 1, 2, \ldots, n$ liczba

$$2\cdot\binom{2n}{2i-1}\cdot x^{2i-1}$$

jest k_i-tą potęgą liczby całkowitej dodatniej.

Dowód istnienia takiej liczby x pozostawiamy Czytelnikowi.

7. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $abc = 1$. Wykazać, że

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} \geqslant \sqrt{2}.$$

Rozwiązanie

Niech p, q, r będą takimi liczbami dodatnimi, że

$$a = \frac{q}{r}, \quad b = \frac{r}{p}, \quad c = \frac{p}{q}$$

(możemy przyjąć np. $p = c$, $q = 1$, $r = bc$). Wówczas nierówność dana do udowodnienia przyjmuje postać

$$\sqrt{\frac{2pq}{pq+2qr+2rp}} + \sqrt{\frac{2qr}{qr+2rp+2pq}} + \sqrt{\frac{2rp}{rp+2pq+2qr}} \geqslant \sqrt{2},$$

czyli, po wprowadzeniu oznaczeń $x = qr$, $y = rp$, $z = pq$,

$$\sqrt{\frac{2x}{2(x+y+z)-x}} + \sqrt{\frac{2y}{2(x+y+z)-y}} + \sqrt{\frac{2z}{2(x+y+z)-x}} \geqslant \sqrt{2}.$$

Powyższa nierówność jest jednorodna, więc bez utraty ogólności rozumowania możemy założyć, że $x+y+z=1$. Pozostaje więc udowodnić nierówność

$$\sqrt{\frac{x}{2-x}}+\sqrt{\frac{y}{2-y}}+\sqrt{\frac{z}{2-z}}\geqslant 1. \tag{1}$$

Jednakże dla dowolnej liczby $t\in(0;1)$ mamy

$$\sqrt{\frac{t}{2-t}}\geqslant t,$$

gdyż nierówność ta jest równoważna zależności $t\geqslant t^2(2-t)$, czyli $0\geqslant -t(t-1)^2$. Stąd wynikają nierówności

$$\sqrt{\frac{x}{2-x}}\geqslant x, \qquad \sqrt{\frac{y}{2-y}}\geqslant y, \qquad \sqrt{\frac{z}{2-z}}\geqslant z.$$

Sumując je stronami uzyskujemy (1), co kończy rozwiązanie.

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje na płaszczyźnie zbiór 2007 punktów białych leżących na okręgu oraz 2007 punktów czarnych takich, że każda prosta przechodząca przez dwa punkty białe przechodzi również przez pewien punkt czarny.

Rozwiązanie

Takie punkty istnieją.

Rozpatrzmy w przestrzeni sferę s o środku O i punkt S leżący na tej sferze. Niech π będzie płaszczyzną prostopadłą do prostej OS, a σ płaszczyzną nie przechodzącą przez punkt S i nierównoległą do płaszczyzny π. Przyjmijmy ponadto, że część wspólna płaszczyzny σ i sfery s jest okręgiem, w który wpisany jest taki 2007-kąt foremny $A_1A_2\ldots A_{2007}$, że żaden z jego boków nie jest prostopadły do prostej OS.

Każda z prostych SA_i przecina płaszczyznę π w punkcie B_i. Ponieważ odwzorowanie przypisujące punktom A_i punkty B_i jest rzutem stereograficznym sfery s na płaszczyznę π, więc punkty $B_1,B_2,\ldots,B_{2007}$ leżą na jednym okręgu.

Niech l będzie prostą wspólną płaszczyzny π oraz płaszczyzny zawierającej punkt S i równoległej do płaszczyzny σ. Oznaczmy przez C_k $(k=1,2,\ldots,2007)$ punkt przecięcia prostych B_kB_{k+1} oraz l (przyjmujemy, że $B_{2008}=B_1$).

Wówczas przyporządkowując punktom $B_1,B_2,\ldots,B_{2007}$ kolor biały, a punktom $C_1,C_2,\ldots,C_{2007}$ kolor czarny otrzymujemy konfigurację spełniającą warunki zadania. Istotnie: każda prosta A_iA_j jest równoległa do pewnego boku A_kA_{k+1} wielokąta $A_1A_2\ldots A_{2007}$. Stąd wynika, że prosta B_iB_j przechodzi przez punkt C_k.

9. Okrąg o środku S jest dopisany do czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym prosta AC przecina ten okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E i prostopadła do prostej AC przecina proste BS i DS odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że $EP = EQ$.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat:

Punkt O jest środkiem okręgu o. Z punktu S, leżego na zewnątrz okręgu o, poprowadzono styczne SB i SD do tego okręgu. Punkt E leży na odcinku BD. Prosta przechodząca przez punkt E i prostopadła do prostej OE przecina proste BS i DS odpowiednio w punktach P i Q. Wówczas $PE = EQ$.

Dowód:

Zauważmy, że punkty B, P, O, E, jak również punkty D, O, E, Q leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\measuredangle OQP = \measuredangle ODE = \measuredangle OBE = \measuredangle OPQ\,,$$

skąd bezpośrednio uzyskujemy równość $PE = EQ$.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Ponieważ $AB + BC = AD + DC$, więc istnieje elipsa e o ogniskach A, C przechodząca przez punkty B i D. Ponadto proste SB i SD są styczne do tej elipsy. Rozpatrzmy takie powinowactwo osiowe o osi prostopadłej do prostej AC, które przekształca elipsę e na pewien okrąg. Po tym przekształceniu uzyskujemy konfigurację opisaną w lemacie. Teza zadania jest zatem bezpośrednim wnioskiem z lematu.

10. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Punkty P i Q są odpowiednio punktami przecięcia wysokości trójkątów ADE i BCE. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AB i CD. Wykazać, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do prostej MN.

Rozwiązanie

Niech $X = AP \cap DE$, $Y = DP \cap AE$, $Z = BQ \cap EC$, $T = CQ \cap EB$. Rozpatrzmy okręgi o_1 i o_2 odpowiednio o średnicach AB i CD. Okrąg o_1 przechodzi przez punkty X i Z, okrąg o_2 przechodzi przez punkty Y i T. Ponadto

$$AP \cdot PX = DP \cdot PY \qquad \text{oraz} \qquad CQ \cdot QT = BQ \cdot QZ.$$

Z równości tych wynika, że punkty P i Q leżą na osi potęgowej okręgów o_1 i o_2. Wobec tego $PQ \perp MN$.

11. W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCD \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABD.$$

Dowieść, że $AB = CD$.

Rozwiązanie

Teza zadania jest fałszywa. Niech $ABD'CA'B'C'D$ będzie prostopadłościanem, przy czym $ABD'C$ jest dolną ścianą, $A'B'C'D$ — górną ścianą, zaś odcinki AA', BB', $D'C'$, CD są pionowymi krawędziami. Przyjmijmy ponadto, że

$$AC = 9, \quad AA' = 12, \quad AB = 20.$$

Jest oczywiste, że wówczas

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCD = 90^\circ.$$

Ponadto

$$\frac{AC}{CD} = \frac{9}{12} = \frac{15}{20} = \frac{\sqrt{9^2+12^2}}{20} = \frac{\sqrt{AC^2+CD^2}}{AB} = \frac{AD}{AB},$$

co w połączeniu z równościami $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DAB = 90^\circ$ oznacza, że trójkąty ACD i DAB są podobne. Stąd

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABD.$$

Zatem czworościan $ABCD$ spełnia założenia zadania, lecz nie spełnia tezy, gdyż

$$AB = 20 \neq 12 = CD.$$

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne:

1. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach rzeczywistych spełniające dla każdej liczby rzeczywistej x zależność

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2).$$

Rozwiązanie

Wielomian stały $P(x) = c$ spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy gdy $c = c^2$, czyli gdy $c = 0$ lub $c = 1$. Teraz będziemy rozpatrywać wielomiany o dodatnim stopniu.

Wielomiany postaci $P(x) = (x-1)^n$ są rozwiązaniami zadania, ponieważ

$$(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$$

dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 1$.

Udowodnimy, że nie istnieją inne wielomiany, które spełniają warunki zadania.

Niech ax^n $(a \neq 0,\ n \geqslant 1)$ będzie wyrazem wiodącym wielomianu P (to znaczy takim, że stopień wielomianu P jest większy niż stopień wielomianu $P(x) - ax^n$). Wtedy ax^{2n} jest wyrazem wiodącym wielomianu $P(x^2)$, zaś a^2x^{2n} jest wyrazem wiodącym wielomianu $P(x) \cdot P(x+2)$. Z równości wielomianów mamy równość wyrazów wiodących, czyli $a = a^2$, skąd $a = 1$. Mamy więc $P(x) = (x-1)^n + Q(x)$, gdzie Q jest pewnym wielomianem stopnia niższego niż P. Przypuśćmy, że Q jest wielomianem niezerowym o stopniu k $(0 \leqslant k < n)$. Z równości

$$P(x^2) = (x^2-1)^n + Q(x^2)$$

$$P(x) \cdot P(x+2) = [(x-1)^n + Q(x)][(x+1)^n + Q(x+2)]$$

i z warunków zadania otrzymujemy (po zredukowaniu $(x^2-1)^n$) równość

$$Q(x^2) = (x-1)^n Q(x+2) + (x+1)^n Q(x) + Q(x)Q(x+2).$$

Ponieważ po lewej stronie równości mamy wielomian stopnia $2k$, zaś po prawej stopnia $n+k$, więc otrzymujemy $2k = n+k$, co jest sprzeczne z założeniem, że $k < n$. W takim razie Q jest wielomianem zerowym i mamy tezę.

Wobec tego jedynymi wielomianami spełniającymi warunki zadania są $P(x) = 0$, $P(x) = 1$ oraz $P(x) = (x-1)^n$ dla dowolnego naturalnego n.

2. Niech $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n (ciąg Fibonacciego). Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej m istnieje taka liczba k, że liczba $a_k^4 - a_k - 2$ jest podzielna przez m.

Rozwiązanie

Wemy dowolną liczbę całkowitą dodatnią m. Wszystkie kongruencje w poniższym rozwiązaniu oznaczają kongruencje *mod* m. Zauważmy, że wystarczy udowodnić, że istnieje takie k, że $a_k \equiv -1$.

Na początku zauważmy, że wartości dwóch kolejnych wyrazów a_k i a_{k+1} rozważanego ciągu wyznaczają jednoznacznie cały ciąg. Rozpatrujmy teraz wyrazy ciągu *mod* m. Każdy z nich może przyjmować całkowite wartości od 0 do $m-1$, więc istnieje m^2 możliwych par sąsiednich wyrazów. Ponieważ ciąg jest nieskończony, więc istnieją takie liczby $p, i > 0$, że $a_p = a_{p+i}$ oraz $a_{p+1} = a_{p+1+i}$. W takim razie $a_q = a_{q+i}$ dla dowolnego naturalnego q. Jeśli $m \neq 1$ (dla $m=1$ dla dowolnego k zachodzi $a_k \equiv -1$) to mamy $p > 1$. Wtedy

$$a_{2i-2} = a_{2i} - a_{2i-1} = 2a_{2i} - a_{2i+1} = 2a_{2i+2} - 3a_{2i+1} \equiv 2a_2 - 3a_1 = -1.$$

W takim razie dla $k = 2i-2$ mamy tezę.

3. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg k. Półproste DA i CB przecinają się w takim punkcie E, że $CD^2 = AD \cdot ED$. Oznaczmy przez F ($F \neq A$) punkt przecięcia okręgu k z prostą przechodzącą przez punkt A i prostopadłą do prostej ED. Dowieść, że odcinki AD i CF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABE leży na prostej ED.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że DF jest średnicą okręgu k. Na początku wykażemy, że punkt C nie może leżeć po tej samej stronie prostej DF, co punkt A.

Jeśli punkty B i C leżą na krótszym łuku AD, to kąty DCB i DBA są rozwarte, stąd $DC < DB < DA < DE$, co jest sprzeczne z równością $CD^2 = AD \cdot ED$.

Jeśli punkty B i C leżą na krótszym łuku AF, to kąt BAE jest ostry oraz $\sphericalangle DBE = 180° - \sphericalangle DBC \leqslant 90°$, więc punkt wspólny okręgu opisanego na trójkącie AEB oraz półprostej DB (różny od B, jeśli taki istnieje) leży na odcinku BD. Stąd $DC > DB \geqslant DB'$, więc $CD^2 > DB \cdot DB'$. Ponieważ potęga punktu D względem okręgu opisanego na trójkącie ABE jest równa $DB \cdot DB' = DA \cdot DE$, więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że $CD^2 = AD \cdot ED$.

W takim razie punkt C nie leży po tej samej stronie prostej DF, co punkt A, stąd $FC = DA$ wtedy i tylko wtedy gdy czworokąt $DAFC$ jest równoległobokiem, co jest równoważne temu, że CA jest średnicą okęgu k, i dalej równości $CBA = 90°$, co z kolei jest równoważne temu, że środek okręgu opisanego na AEB jest środkiem odcinka AE.

4. Dla każdej liczby rzeczywistej $p \geqslant 1$ rozpatrujemy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których

$$p < x < \left(2 + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right)^2.$$

Dowieść, że z tego zbioru można wybrać takie cztery różne liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, że $ab = cd$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że liczby $a=(k-1)k$, $b=(k+1)k$, $c=(k-1)(k+1)$, $d=k^2$ spełniają równość $ab=cd$ oraz nierówność $a<c<d<b$ dla każdego $k>1$. Niech k będzie najmniejszą liczbą, dla której $p<(k-1)k=a$ (dla ustalonego p). Wykażemy, że dla tego k zachodzi

$$b=(k+1)k\leqslant p+4+2\sqrt{4p+1}=\left(2+\sqrt{p+\frac{1}{4}}\right)^2-\frac{1}{4}<\left(2+\sqrt{p+\frac{1}{4}}\right)^2.$$

Z wyboru liczby k mamy $p\geqslant(k-2)(k-1)$. Rozwiązując tę nierówność otrzymujemy

$$k\leqslant\frac{3}{2}+\sqrt{p+\frac{1}{4}}$$

skąd dalej otrzymujemy

$$b=(k+1)k\leqslant\left(\frac{5}{2}+\sqrt{p+\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}+\sqrt{p+\frac{1}{4}}\right)=$$

$$=\frac{15}{4}+4\sqrt{p+\frac{1}{4}}+\left(p+\frac{1}{4}\right)=p+4+2\sqrt{4p+1}.$$

5. Wyznaczyć wszystkie liczby n należące do zbioru

$$\{3900,3901,3902,3903,3904,3905,3906,3907,3908,3909\},$$

dla których zbiór $\{1,2,3,\ldots,n\}$ można rozbić na rozłączne podzbiory trzyelementowe w taki sposób, aby w każdym uzyskanym podzbiorze suma pewnych dwóch liczb była równa trzeciej liczbie z tego podzbioru.

Rozwiązanie

Z warunku o rozdzieleniu zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$ na rozłączne trzyelementowe zbiory otrzymujemy $3|n$. Dla każdej trójki liczb $\{a,b,a+b\}$, suma jej elementów wynosi $2(a+b)$, w takim razie suma wszystkich liczb ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$ musi być parzysta, czyli liczba $n(n+1)$ jest liczbą podzielną przez 4. Z tego warunku i z podzielności n przez 3 otrzymujemy, że n jest liczbą postaci $12k$ lub $12k+3$, a stąd, że $n=3900$ lub $n=3903$.

Wykażemy teraz, że liczby 3900 i 3903 faktycznie spełniają warunki zadania. W tym celu pokażemy, że jeśli dla pewnej liczby k istnieje podział na rozłączne podzbiory, o których mowa w zadaniu, to istnieje również dla liczb $4k$ i $4k+3$. Wtedy otrzymamy żądany podział dla kolejnych liczb:

$$3\to15\to60\to243\to975\to3900(3903)$$

(dla 3 podział jest trywialny).

Z podziału zbioru $\{1,2,\ldots,k\}$ spełniającego warunki zadania otrzymujemy analogiczny podział zbioru $2,4,\ldots,2k$ (przez pomnożenie liczb w każdej trójce przez 2).

W przypadku, gdy chcemy otrzymać podział zbioru $\{1,2,\ldots,4k\}$, dzielimy pozostałe liczby $(\{1,3,5,\ldots,2k-1,2k+1,2k+2,\ldots,4k-1,4k\})$ na trójki postaci

$$\{2j-1,3k-j,3k+j\}, \qquad \text{gdzie} \qquad j=1,2,\ldots,k,$$

pokazane w kolumnach poniższej tabelki:

1	3	5	$\ldots$	$2k-3$	$2k-1$
$3k$	$3k-1$	$3k-2$	$\ldots$	$2k+2$	$2k+1$
$3k+1$	$3k+2$	$3k+3$	$\ldots$	$4k-1$	$4k$

W drugim przypadku zbiór $\{1,3,5,\ldots,2k-1,2k+1,2k+2,\ldots,4k+2,4k+3\}$ dzielimy na trójki postaci

$$\{2j-1,3k+3-j,3k+j+2\} \qquad \text{dla} \qquad j=1,2,\ldots,k+1,$$

pokazane w tabeli poniżej:

1	3	5	$\ldots$	$2k-1$	$2k+1$
$3k+2$	$3k+1$	$3k$	$\ldots$	$2k+3$	$2k+2$
$3k+3$	$3k+4$	$3k+5$	$\ldots$	$4k+2$	$4k+3$

Te podziały dowodzą tezy, że szukanymi w zadaniu liczbami są 3900 i 3903.

6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Okrąg przechodzący przez punkty A i D jest styczny zewnętrznie do okręgu przechodzącego przez punkty B i C w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta. Załóżmy, że $|\sphericalangle PAB|+|\sphericalangle PDC|\leqslant 90^\circ$ oraz $|\sphericalangle PBA|+|\sphericalangle PCD|\leqslant 90^\circ$. Dowieść, że $|AB|+|CD|\geqslant|BC|+|AD|$.

Rozwiązanie

Z twierdzenia o stycznej i cięciwie wynika, że P jest punktem styczności dwóch okręgów z treści zadania wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

(1) $$|\sphericalangle ADP|+|\sphericalangle BCP|=|\sphericalangle APB|.$$

Rozważmy teraz okręgi o_1 i o_2 opisane odpowiednio na trójkątach ABP i CDP i przypuśćmy, że przecinają się one w dwóch punktach P i Q $(P\neq Q)$.

Ponieważ punkt A leży na zewnątrz okręgu opisanego na trójkącie BCP, więc otrzymujemy, że $|\sphericalangle BCP|+|\sphericalangle BAP|<180^\circ$. Stąd punkt C leży na zewnątrz okręgu o_1. Analogicznie otrzymujemy, że punkt D również leży na zewnątrz o_1, a stąd, że punkty P i Q leżą na tym samym łuku CD okręgu o_2.

Analogicznie punkty P i Q leżą na tym samym łuku AB okręgu o_1. Wynika stąd, że punkt Q leży wewnątrz kąta wypukłego BPC lub kąta wypukłego APD. Bez straty ogólności przyjmijmy, że Q leży wewnątrz kąta wypukłego NPC. Wtedy z warunków zadania wynika, że

(2) $$|\sphericalangle AQD|=|\sphericalangle PQA|+|\sphericalangle PQD|=|\sphericalangle PBA|+|\sphericalangle PCD|\leqslant 90^\circ.$$

Z warunków zadania oraz wpisywalności czworokątów $ABQP$ i $DPQC$ w okrąg mamy:

$$(3) \qquad |\sphericalangle BQC| = |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle PDC| \leqslant 90^\circ.$$

Stąd punkt Q leży nie tylko wewnątrz kąta wypukłego BPC, ale również wewnątrz trójkąta BPC, a więc wewnątrz czworokąta $ABCD$.

Z równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku oraz (1) mamy

$$|\sphericalangle ADQ| + |\sphericalangle BCQ| = |\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle PDQ| + |\sphericalangle BCP| - |\sphericalangle PCQ| =$$
$$= |\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle APB| = |\sphericalangle AQB|$$

Otrzymujemy stąd, że okręgi opisane na trójkątach BCQ i DAQ są styczne w punkcie Q, co jest sprzeczne z założeniem, że $P \neq Q$. W takim razie okręgi o_1 i o_2 są styczne w punkcie P, oraz, na podstawie (2) i (3) wiadomo, że kąty APD i BPC nie są rozwarte.

Rozważmy dwa półokręgi o średnicach BC i DA nie leżące na zewnątrz czworokąta $ABCD$. Ponieważ kąty APD i BPC nie są rozwarte, to dwa półokręgi leżą wewnątrz okręgów opisanych na trójkątach BQC i AQD, więc mają co najwyżej jeden punkt wspólny P. Niech M i N będą środkami odcinków BC i DA. Wtedy $|MN| \geqslant \frac{1}{2}(|BC| + |DA|)$. Z drugiej strony, ponieważ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD})$, więc $|MN| \leqslant \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$, a stąd już wynika, że $|AB| + |CD| \geqslant |BC| + |DA|$.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

notatki

notatki

Spis treści