Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej

Zachełmie 1991

Teksty zadań

1. Niech $a_i \geqslant 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnić nierówność
$$(a_1^n + n - 1) \cdot \ldots \cdot (a_n^n + n - 1) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)^n.$$

2. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą niewspółliniowymi punktami płaszczyzny, l — prostą na tejże płaszczyźnie. Niech dalej d_i oznacza odległość punktu A_i od prostej l oraz niech $d(l) = d_1 + \ldots + d_n$. Udowodnić, że $d(l)$ osiąga wartość najmniejszą dla pewnej prostej l przechodzącej przez co najmniej dwa spośród danych punktów.

3. W każdym polu szachownicy $m \times n$ napisano 1 albo -1. Możemy wykonywać następujące operacje: zmienić znaki na przeciwne w polach figury powstałej przez usunięcie z dowolnej podszachownicy o wymiarach 3×3 dwóch przeciwległych narożnych pól. Dla jakich m i n można w wyniku skończonej liczby takich operacji zmienić znak w każdym polu naszej szachownicy?

4. Niech $A_1, \ldots, A_k$ będą podzbiorami zbioru n-elementowego takimi, że żaden z nich nie jest zawarty w drugim. Dowieść, że jeśli zbiór A_i ma n_i elementów, to spełniona jest nierówność
$$\frac{1}{\binom{n}{n_1}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n}{n_k}} \leqslant 1.$$

5. Wypukły n-kąt $A_1, \ldots, A_n$ podzielono przekątnymi na trójkąty. Niech $B_1, \ldots, B_n$ będą dowolnymi punktami płaszczyzny, wśród których nie ma trzech współliniowych. Dowieść, że istnieje wzajemnie jednoznaczne przekształcenie f zbioru $\{A_1, \ldots, A_n\}$ w zbiór $\{B_1, \ldots, B_n\}$ takie, że jeśli A_iA_j i A_kA_l są dwiema różnymi z wybranych przekątnych, to odcinki $f(A_i)f(A_j)$ i $f(A_k)f(A_l)$ nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.

6. Niech a_0, a_1, a_2 będą trzema parami różnymi prostymi w przestrzeni. Niech dalej $A_0, A_1, \ldots$ będzie ciągiem punktów takim, że jeśli $3 \mid k - i$, $i \in \{0, 1, 2\}$, to punkt A_k leży na prostej a_i oraz prosta $A_{k-1}A_k$ jest prostopadła do prostej a_i. Dowieść, że jeśli $A_0 = A_8$, to $A_0 = A_3$.

7. $3k$ punktów dzieli okrąg na tyleż łuków. Wśród nich jest k łuków długości 1, k długości 2 i k długości 3. Pokazać, że wśród tych punktów istnieją dwa antypodyczne (tzn. są końcami pewnej średnicy).

8. Na płaszczyźnie dane są okręgi o_1, o_2, o_3 takie, że o_i i o_{i+1} przecinają się w punktach A_i i A_{i+3} odpowiednio (symbol o_k oznacza okrąg o_i taki, że $3 \mid k - i$, np. $o_7 = o_1$). Niech punkt M_1 leży na o_1, a jeśli określiliśmy już punkty $M_1, \ldots, M_k$, to niech punkt $M_{k+1} \neq A_k$ leży na o_{k+1} i prostej M_kA_k. Pokazać, że $M_7 = M_1$.

9. Niech $f(x, y) = (x^2 + y^2)/(xy - 1)$. Pokazać, że jeśli dla pewnych liczb całkowitych m, n wartość $f(m, n)$ jest liczbą naturalną, to $f(m, n) = 5$. Ponadto dowieść, że równanie $f(x, y) = 5$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych.

10. Rozwiązać układ równań
$$x^3 - y^2 - y = y^3 - z^2 - z = z^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}.$$

11. Pokazać, że w dowolnym czworościanie z każdego punktu widać pewną krawędź pod kątem Φ takim, że $\cos \Phi \leqslant -\frac{1}{3}$.

12. Na spotkaniu przedwyborczym pewnej partii każdy członek wybiera spośród uczestników spotkania 10 swoich kandydatów. Grupę ludzi nazwiemy *lubianą* przez danego członka, jeśli jest w niej co najmniej jeden jego kandydat. Wiadomo, że dla dowolnych sześciu wyborców istnieje dwuosobowa grupa uczestników spokania lubiana przez każdego z tej szóstki. Dowieść, że istnieje 10 członków partii tworzących grupę lubianą przez wszystkich uczestników spotkania.

13. W równoległoboku $ABCD$ niech prosta l_1 będzie symetryczna do prostej AD względem prostej AC, natomiast prosta l_2 niech będzie symetryczna do prostej BC względem prostej BD oraz niech X będzie punktem wspólnym prostych l_1 i l_2. Jeśli $\dfrac{AC}{BD} = k$, to czemu równa się stosunek $\dfrac{AX}{BX}$?

14. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą i niech $q = \frac{p-1}{2}$. Pokazać, że $2^{3q} \cdot q! - (-1)^q (p-2)!!$ dzieli się przez p^3.
(Napis $n!!$ oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n tej samej parzystości co n, np. $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6, \quad 5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5$.)

15. Niech A_1, A_2, A_3, M będą punktami przestrzeni, a_i — długością boku trójkąta $A_1A_2A_3$ przeciwległego wierzołkowi A_i oraz niech b_i oznacza długość odcinka MA_i. Dowieść, że spełniona jest nierówność

$$a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + a_3 b_3^2 \geqslant a_1 a_2 a_3.$$

16. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, $k = \frac{p-1}{2}$ oraz niech $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k+1}$ będą liczbami naturalnymi. Pokazać, że istnieją indeksy i, j takie, że $\dfrac{a_i}{\mathrm{NWD}(a_i, a_j)} \geqslant k+1$.

17. Na płaszczyźnie dane są dwa przystające kwadraty K_1 i K_2. Czy można podzielić kwadrat K_1 na trójkąty $T_1, \ldots, T_k$ tak, by istniały translacje $t_1, \ldots, t_k$ takie, że kwadrat K_2 jest zawarty w sumie mnogościowej obrazów $t_i(T_i)$?

18. Rozwiązać układ równań

$$3(x + \frac{1}{x}) = 4(y + \frac{1}{y}) = 5(z + \frac{1}{z}); \qquad xy + yz + zx = 1.$$

19. W trójkącie ABC niech $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{AC}$ oraz $M, N \in \overline{XY}$ są takie, że $XM = MN = NY = \frac{1}{3}XY$. Niech M_1 będzie punktem wspólnym prostych BC i AM, a N_1 — prostych BC i AN. Pokazać, że $M_1N_1 \leqslant \frac{1}{3}BC$.

20. Pokazać, że jeśli $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, to ciąg $a_n = \sin W(n)$ nie ma granicy.

21. Udowodnić, że jeśli $a_1 > 1, \ \ldots, \ a_n > 1$ i $|a_i - a_{i+1}| < 1$ dla $i = 1, \ldots, n-1$, to

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} < 2n - 1.$$

22. Czy kwadrat można podzielić na pięć czworokątów tak, by w każdy z nich dało sie wpisać okrąg o tym samym promieniu?

23. Liczbę naturalną nazywamy *doskonałą*, jeśli jest sumą swoich wszystkich dzielników właściwych (np. 6, 28). Pokazać, że istnieje tylko skończenie wiele liczb nieparzystych doskonałych mających dokładnie 8 różnych dzielników pierwszych.

24. Dany jest trójkąt ABC. Niech X, Y, Z będą punktami odpowiednio boków BC, CA, AB takimi, że $BX = k \cdot BC, \ CY = k \cdot CA, \ AZ = k \cdot AB, \ k \in (0,1)$. Dowieść, że istnieje trójkąt o bokach długości AX, BY, CZ. Niech $T_k(ABC) = A_1B_1C_1$ oznacza trójkąt zorientowany przeciwnie niż trójkąt ABC i taki, że $A_1B_1 = AX, \ B_1C_1 = BY, \ C_1A_1 = CZ$. Pokazać, że trójkąty $T_k(T_k(ABC))$ i ABC są podobne i znaleźć skalę podobieństwa.

25. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje jej wieloktrotność nie przekraczająca n^4, której zapis dziesiętny ma co najwyżej cztery różne cyfry.

26. Pokazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}.$$

27. Znaleźć wszystkie czworościany, które są jednoznacznie wyznaczone przez pola swoich ścian i objętość.

28. Niech $G(n)$ oznacza liczbę cyfr w zapisie dziesiętnym liczby 2^n. Czy

$$\sum_{n=1}^{\infty} G(n) \cdot 2^{-n} = \frac{1169}{1023}?$$

29. Niech $0 \leqslant a_i$, $i = 1, \ldots, k$ będą liczbami całkowitymi takimi, że $\sum_{i=1}^{k} i a_i = n$ oraz niech $2 \cdot \mathrm{NWW}(1, \ldots, k) \mid n$. Pokazać, że istnieją liczby całkowite $b_1, \ldots, b_k$ takie, że $0 \leqslant b_i \leqslant a_i$ oraz $\sum_{i=1}^{k} i b_i = \frac{n}{2}$.

30. Niech $g(n)$ oznacza liczbę cyfr większych od 4 w zapisie dziesiętnym liczby 2^n. Czy

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) \cdot 2^{-n} = \frac{2}{9}?$$

31. W trójkąt ABC wpisano okrąg o styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach C_1, A_1, B_1. Niech X będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC i niech A_2, B_2, C_2 będą punktami przecięcia z o odpowiednio prostych AX, BX, CX (wybieramy punkty bliższe wierzchołkom trójkąta). Pokazać, że proste A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.

32. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, n — kwadratem liczby naturalnej oraz niech $\mathrm{NWD}(p, n-1) = 1$. Dowieść, że wielomian $w(x) = x^n - px$ jest różnowartościowy na liczbach wymiernych, tzn. jeśli q_1, q_2 są liczbami wymiernymi oraz $w(q_1) = w(q_2)$, to $q_1 = q_2$.