

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej



Mszana Dolna, 10 – 22 czerwca 2014
(wydanie pierwsze)

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 10–22 czerwca 2014

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. (018) 33 11 660

Kadra:
Dominik Burek
Tomasz Cieśla
Maciej Gawron
Teodor Jerzak
Tomasz Kobos
Wojciech Nadara
Michał Zając

Olimpiada Matematyczna w Internecie:
www.om.sem.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 10-22 czerwca 2014 w Mszanie Dolnej, w ośrodku „Słoneczny”. Kadre obozu stanowili: Dominik Burek, Tomasz Cieśla, Maciej Gawron, Teodor Jerzak, Tomasz Kobos, Wojciech Nadara, oraz Michał Zajac.

W dniach 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19 i 20 czerwca odbyły się zawody indywidualne, a 14 i 21 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Mecz matematyczny trwał od wieczora dnia poprzedniego do południa.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 192 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 140, 128 i 119 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie.

Bezpośrednio po zakończeniu obozu, w dniach 22-25 czerwca w Mszanie Dolnej w ośrodku „Słoneczny” odbyły się XIV Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. W dniach 23-24 czerwca każdy z zawodników rozwiązywał po trzy zadania, mając na to po cztery i pół godziny.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami oraz zadania z XIV Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: www.om.sem.edu.pl

Podziękowania. Poniższa broszura ukazuje się w roku 2025, czyli po 11 latach od zakończenia obozu. Jestem niezmiernie wdzięczny Tomaszowi Cieśli oraz Michałowi Kiezie za nieocenioną pomoc, bez której dokończenie broszury nie byłoby możliwe.

Kierownik naukowy obozu w roku 2014
Tomasz Kobos

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	18	0	0	2
2.	13	0	0	7
3.	2	1	0	17
4.	0	1	1	18
5.	16	0	0	4
6.	16	0	1	3
7.	8	0	0	12
8.	1	2	1	16
9.	15	0	0	5
10.	12	2	0	6
11.	0	0	0	20
12.	2	0	1	17
13.	16	2	2	0
14.	6	1	0	13
15.	3	0	6	11
16.	1	1	1	17
17.	9	0	0	11
18.	4	0	0	16
19.	6	0	0	14
20.	1	0	0	19
21.	19	0	0	1
22.	7	0	0	13
23.	8	0	0	12
24.	0	0	0	20
25.	5	0	1	14
26.	14	1	0	5
27.	5	0	0	15
28.	1	0	1	18
29.	16	0	0	4
30.	13	0	2	5
31.	3	2	1	14
32.	3	0	0	17

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ określony jest przez warunki

$$a_1 = 1, a_{2n} = a_n \text{ oraz } a_{2n+1} = (-1)^n a_n \text{ dla } n \geq 1.$$

Wyznaczyć wartość

$$\sum_{n=1}^{2015} a_n a_{n+2}.$$

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , w którym $AB > AC$. Punkt M jest środkiem boku BC , a punkt D środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , który zawiera punkt A . Dowieść, że $\angle ADI = \angle IMC$.

3. Funkcja f prowadząca ze zbioru punktów przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ w ten sam zbiór spełnia warunki:

- dla dowolnych dwóch punktów $A, B \in \mathbb{R}^3$ odległość pomiędzy punktami $f(A)$ i $f(B)$ jest równa odległości pomiędzy A i B ,
- istnieje taka liczba naturalna n , że dla dowolnego punktu A spełniony jest warunek $f^{(n)}(A) = A$ (gdzie $f^{(n)}$ oznacza n -krotne złożenie funkcji f)

Wykazać, że istnieje punkt $A \in \mathbb{R}^3$ taki, że $f(A) = A$.

4. Udowodnić, że liczba

$$\sqrt{1007^2 + 1} + \sqrt{1008^2 + 1} + \dots + \sqrt{2014^2 + 1}$$

jest niewymierna.

5. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

jest parzysta.

6. Okrąg o o środku w punkcie O jest opisany na ostrokątnym trójkącie ABC . Okrąg o_1 jest styczny do o w punkcie A oraz do prostej BC w punkcie D . Okrąg o_1 przecina proste AB i AC odpowiednio w punktach E i F .

Punkty A_1 i E_1 są odpowiednio odbiciami symetrycznymi punktów A i E względem środka okręgu o_1 . Punkt H jest przecięciem prostych BO i A_1E_1 . Dowieść, że $DF^2 = AF \cdot E_1H$.

7. Dana jest liczba całkowita dodatnia n i liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ spełniające warunek

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 1)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 - 1) > (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n - 1)^2.$$

Wykazać, że $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 1$.

8. Dane są liczby całkowite dodatnie $m \geq n$ oraz n -wierzchołkowy graf G o m krawędziach. Dla liczby całkowitej $k \geq 3$ niech C_k oznacza liczbę k -elementowych cykli prostych w grafie G . Udowodnić, że

$$\sum_{k=3}^n C_k \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^k \geq 1.$$

9. Dla danej liczby całkowitej dodatniej $n \geq 1$ oraz liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ rozważmy wielomiany f i g zadane jako

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k - 1} x^k \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnić, że jeżeli liczby 1 i 2^{n+1} są pierwiastkami g , to f posiada pierwiastek w przedziale $(0, 2^n)$.

10. Niech S oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich, które nie są kwadratami liczb całkowitych. Dla danej liczby $n \in S$ rozważamy wszystkie wybory liczb całkowitych $n < a_1 < a_2 < \dots < a_r$, dla których liczba $n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r$ jest kwadratem liczby całkowitej. Niech $f(n)$ oznacza najmniejszą możliwą liczbę a_r , która pojawia się w tego typu wyborach. Dowieść, że funkcja f , prowadząca z S w zbiór liczb naturalnych, jest różnowartościowa.

Przykład: liczba $2 \cdot 3 \cdot 6$ jest kwadratem liczby całkowitej, ale żadna z liczb $2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 4, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 4 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ nim nie jest, a zatem $f(2) = 6$.

11. W rzędy tablicy $2^n \times n$ wpisano wszystkie możliwe ciągi o wyrazach ze zbioru $\{-1, 1\}$. Wymazano następnie niektóre liczby z tablicy i zastąpiono je przez 0. Wykazać, że z tablicy można wykreślić pewne k rzędów ($0 \leq k < 2^n$), tak aby w otrzymanej tablicy $(2^n - k) \times n$ suma w każdej kolumnie była równa 0.

12. Dany jest trójkąt ABC . Punkt M jest środkiem boku BC , a punkt D środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , który zawiera punkt A . Punkty I_1, I_2 to środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty AMB, AMC . Udowodnić, że punkty A, D, I_1, I_2 leżą na jednym okręgu.

13. Wyznaczyć wszystkie liczby złożone n , których wszystkie dzielniki większe od 1 można ustawić na okręgu w taki sposób, aby dowolne dwa sąsiadujące dzielniki nie były względnie pierwsze.

14. Dana jest rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ spełniająca następujące warunki:

- jeżeli $S, S' \in \mathcal{F}$, to $S \cup S' \in \mathcal{F}$ oraz $S \cap S' \in \mathcal{F}$,
- jeżeli $\emptyset \neq S \in \mathcal{F}$, to istnieje podzbiór $T \subseteq S$ taki, że $T \in \mathcal{F}$ oraz T zawiera dokładnie jeden element mniej niż S .

Niech $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(\emptyset) = 0$ oraz

$$f(S \cup S') = f(S) + f(S') - f(S \cap S') \text{ dla dowolnych } S, S' \in \mathcal{F}.$$

Orzec, czy istnieją liczby rzeczywiste $f_1, f_2, \dots, f_n$ takie, że $f(S) = \sum_{i \in S} f_i$ dla dowolnego $S \in \mathcal{F}$.

15. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu, który jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N . Okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ są wpisane odpowiednio w trójkąty ANK, BKL, CLM, DMN . Niech $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ będą stycznymi zewnętrznymi odpowiednio do par okręgów $(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_4), (\omega_4, \omega_1)$, które są różne od boków czworokąta $ABCD$. Udowodnić, że czworokąt ograniczony przez proste $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ jest rombem.

16. Wyznaczyć wszystkie pary wielomianów (P, Q) o współczynnikach rzeczywistych, które dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniają warunek

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1.$$

17. Punkt D leży na tym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC , który nie zawiera punktu C . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi D odpowiednio na boki AB i AC , zaś M i N to odpowiednio środki odcinków BC i PQ . Wykazać, że proste DN i MN są prostopadłe.

18. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita $0 < a < \sqrt{p} + 1$, że dla dowolnej liczby całkowitej x liczba $x^2 - a$ nie dzieli się przez p .

19. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ liczb dodatnich. Dowieść, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych dodatnich n zachodzi nierówność $1 + a_n > a_{n-1} \sqrt[n]{2}$.

20. W wierzchołkach $2n$ -kąta foremnego zostały wpisane liczby ze zbioru $\{0, 1\}$, przy czym każdej z nich użyto dokładnie n razy. Możemy wykonać jeden obrót całego układu wpisanych liczb o kąt będący całkowitą wielokrotnością $\frac{\pi}{n}$ i liczbę wpisaną w każdym wierzchołku zastąpić iloczynem liczb przed i po obrocie. Wyznaczyć największą stałą $\alpha \geq 0$ o następującej własności: dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dla dowolnego początkowego wpisania liczb w wierzchołki $2n$ -kąta istnieje obrót, po którym w co najmniej αn wierzchołkach wielokąta znajduje się liczba 0.

21. Niech E będzie sumą mnogościową pewnej skończonej liczby kół otwartych na płaszczyźnie. Udowodnić, że z tych kół można wybrać parami rozłączne koła $K_1, K_2, \dots, K_n$ takie, że

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n 3K_i,$$

gdzie jeżeli K jest kołem otwartym o środku S i promieniu r , to $3K$ jest kołem otwartym o środku S i promieniu $3r$.

22. Dowieść, że zbiór rozwiązań nierówności

$$\sum_{k=1}^{2013} \frac{k}{x-k} \geq \frac{2013}{2}$$

jest sumą rozłącznych przedziałów o łącznej długości równej 2014.

23. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkty E i F to odpowiednio punkty przecięcia prostych AC z BD oraz AD z BC . Okręgi opisane na trójkątach ADE i BCE przecinają się w punkcie $G \neq E$. Wykazać, że $\angle AFE = \angle GFB$.

24. Dany jest ciąg $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ zadany poprzez warunki $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, k istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że $F_n \equiv a \pmod{5^k}$.

25. Dla danej liczby całkowitej dodatniej n niech $p(n)$ oznacza liczbę liczb w przedziale $[1, n]$, które można przedstawić w postaci a^k dla pewnej liczby naturalnej a oraz liczby całkowitej $k \geq 2$. Dowieść, że dla nieskończonego wielu n , liczba $\frac{n}{p(n)}$ jest całkowita.

26. Dany jest wielokąt wypukły W oraz punkt P w jego wnętrzu o następującej własności: dowolna prosta przechodząca przez P dzieli obwód W na dwie równe części. Udowodnić, że wielokąt W jest środkowosymetryczny.

27. Dana jest n -wymiarowa szachownica o wymiarach $k \times k \times \dots \times k$. Na niektórych jej polach stoją wieże. Mówimy, że dwie wieże się biją, gdy stoją na polach, które mają wspólną pewną współrzędną. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej s , spośród $sk^{n-1} + 1$ wież na szachownicy można wybrać $s + 1$, z których żadne dwie się nie biją.

28. Wykazać, że dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieją liczby rzeczywiste x, y takie, że

$$f(x - f(y)) > yf(x) + x.$$

29. Dany jest skończony zbiór osób S o następującej własności: dowolne dwie osoby o tej samej liczbie znajomych w S nie mają wspólnych znajomych w S . Udowodnić, że jeżeli w S istnieje osoba, która ma przynajmniej jednego znajomego, to w S istnieje również osoba, która posiada dokładnie jednego znajomego.

30. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c , dla których liczba $a^2 - bc$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że liczba $2a + b + c$ jest złożona.

31. Dana jest liczba rzeczywista $a \geq 3$ i wielomian P stopnia n o współczynnikach rzeczywistych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej $0 \leq i \leq n + 1$ zachodzi nierówność $|a^i - P(i)| \geq 1$.

32. Punkt P należy do tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , do którego nie należy punkt A . Punkty I_1, I_2 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty PAB i PAC . Dowieść, że przy ustalonych punktach A, B, C i zmieniającym się punkcie P , okręgi opisane na trójkątach PI_1I_2 mają punkt wspólny.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $n^7 + 7$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$$

jest złożona.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony zbiór S liczb całkowitych dodatnich o następującej własności: dla dowolnych liczb $a, b \in S$ takich, że $a \neq b$ liczba $a+b$ nie posiada dzielnika będącego kwadratem liczby całkowitej większej od 1.

4. W tablicy

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

takiej, że $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ dla $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie 2014 razy. Dowieść, że dla pewnej pary $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ zachodzi nierówność $a_{m,n} > mn$.

5. Udowodnić, że dla liczb dodatnich $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)(1 + \sqrt[4]{abcd})^4 \geq 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d).$$

6. Szachownicę $n \times n$ pokryto trójkątami o wierzchołkach w punktach kratowych i o polu równym $\frac{1}{2}$. Dowieść, że co najmniej $2n$ z tych trójkątów jest prostokątnych.

7. Na okręgu napisano skończenie wiele liczb ze zbioru $\{0, 1\}$. Łukiem długości $L \geq 0$ nazywamy ciąg L kolejnych liczb na okręgu. Dla danego łuku w niech $Z(w)$ i $N(w)$ oznaczają odpowiednio liczbę zer i jedynek, które on zawiera. Wiadomo przy tym, że dla dowolnych dwóch łuków w i w' tej samej

długości zachodzi nierówność $|Z(w) - Z(w')| \leq 1$. Załóżmy, że dla pewnych łuków $w_1, w_2, \dots, w_k$ liczby

$$Z = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Z(w_j) \text{ oraz } N = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k N(w_j)$$

są całkowite. Udowodnić, że istnieje łuk w , dla którego $Z(w) = Z$ i $N(w) = N$.

8. *Kostkę* nazywamy sześcián, który na każdej swojej ścianie ma wpisaną jedną liczbę całkowitą dodatnią. *Kostkę zwykłą* nazywamy sześcián, na którego ścianach wpisano liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wyznaczyć wszystkie ciągi kostek $(K_1, K_2, \dots, K_{2014})$ o następującej własności: dla dowolnej liczby naturalnej n prawdopodobieństwo uzyskania liczby n jako sumy wyników rzutów kostkami $K_1, K_2, \dots, K_{2014}$ jest równe prawdopodobieństwu uzyskania liczby n jako sumy wyników rzutów 2014 zwykłymi kostkami.

9. Dwa okręgi ω_1, ω_2 o promieniu 1 przecinają się w punktach X i Y , przy czym $XY = 1$. Punkt C leży na okręgu ω_1 . Styczne CA i CB do okręgu ω_2 przecinają ω_1 odpowiednio w punktach B' i A' . Proste AA' i BB' przecinają się w punkcie Z . Wyznaczyć $\angle XZY$.

10. Punkt X leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym

$$XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB.$$

Niech I_1, I_2, I_3 będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio XBC, XCA i XAB . Wykazać, że proste AI_1, BI_2 i CI_3 przecinają się w jednym punkcie.

11. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt F leżący na odcinku CD . Punkty O_1, O_2 i O_3 są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABF, BCF i ADF . Dowieść, że ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$ leży na prostej AB .

Drugi Mecz Matematyczny

1. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zadany poprzez warunki: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ oraz $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n \geq 2$. Udowodnić, że jeżeli k jest liczbą naturalną, która dzieli pewien wyraz ciągu (a_n) , to k nie daje reszty 5 z dzielenia przez 8.

2. Dany jest niestały wielomian P o współczynnikach całkowitych i dodatnim współczynnikiem wiodącym. Wykazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia m , dla której liczba $P(m!)$ jest złożona.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba całkowita dodatnia k , dla której liczba $p = 6k + 1$ jest pierwsza i spełniona jest kongruencja

$$\binom{3k}{k} \equiv 1 \pmod{p}.$$

4. Dla danej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć wartość sumy

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

5. Dana jest funkcja $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, która dla dowolnych liczb dodatnich x, y spełnia warunki

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x+y) \leq 2 \max\{f(x), f(y)\}.$$

Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $f(x) + f(y) \geq f(x+y)$.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. W każde pole prostokąta o wymiarach $r \times s$, gdzie $1 \leq r, s \leq n$, wpisano pewną liczbę ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Prostokąt nazywamy *łacińskim*, jeżeli w żadnym wierszu i w żadnej kolumnie nie ma dwóch takich samych liczb. Udowodnić, że prostokąt łaciński $r \times s$ można uzupełnić do kwadratu łacińskiego $n \times n$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda z liczb $1, 2, \dots, n$ występuje w nim co najmniej $r + s - n$ razy.

7. Udowodnić, że istnieje zbiór A liczb całkowitych dodatnich o następującej własności: dla dowolnego nieskończonego zbioru S liczb pierwszych, istnieją

dwie liczby całkowite dodatnie $m \in A$ oraz $n \notin A$, z których każda jest iloczynem dokładnie k różnych liczb pierwszych ze zbioru S dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 2$.

8. Bob Budowniczy i Buldożer grają w grę na punktach kratowych przestrzeni trójwymiarowej. W swoim ruchu Bob kładzie krzyżyk na polu, które nie należy do żadnej zniszczonej płaszczyzny, zaś ruch Buldożera polega na zniszczeniu dowolnej płaszczyzny prostopadłej do jednej z osi układu współrzędnych, na której Bob nie postawił wcześniej żadnego krzyżyka. Pierwszy ruch wykonuje Bob, a następnie ruchy są wykonywane przez obu graczy naprzemiennie. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których Bob Budowniczy może ułożyć n kolejnych krzyżyków na prostej równoległej do jednej z osi układu współrzędnych, niezależnie od ruchów Buldożera.

9. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o . Punkt P leży na prostej BC , przy czym punkty P, B, C leżą na prostej w tej właśnie kolejności. Okrąg ω jest styczny zewnętrznie do okręgu o oraz do odcinków PA i PB odpowiednio w punktach X i Y . Udowodnić, że środek okręgu dopisanego do trójkąta ABC stycznego do odcinka AB leży na prostej XY .

10. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O . Punkty E i F są odpowiednio punktami przecięcia półprostych $DA^{\rightarrow}$ z $CB^{\rightarrow}$ i $AB^{\rightarrow}$ z $DC^{\rightarrow}$. Prosta prostopadła do AC i przechodząca przez F przecina prostą EO w punkcie X . Udowodnić, że $\angle CDX = 90^\circ$.

11. Okrąg o środku I jest wpisany w trójkąt ABC i styczny do jego boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Okrąg ω o środku w punkcie A i promieniu AF przecina wysokość trójkąta ABC , poprowadzoną z wierzchołka A , w punkcie P . Prosta DP przecina okrąg ω w punkcie X , zaś prosta XA przecina prostą BC w punkcie S . Dowieść, że punkty P, I, S są współliniowe.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Wykazać, że liczby rzeczywiste dodatnie a , b , c spełniają równanie

$$a^4 + b^4 + c^4 + 4a^2b^2c^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje trójkąt ABC o kątach wewnętrznych α , β , γ taki, że

$$\sin \alpha = a, \quad \sin \beta = b \quad \text{oraz} \quad \sin \gamma = c.$$

2. Dla danych liczb całkowitych dodatnich a , b i x_1 definiujemy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zadany poprzez zależność $x_n = ax_{n-1} + b$ dla $n \geq 2$. Znaleźć warunek konieczny i wystarczający jaki muszą spełniać liczby a , b , x_1 , aby dla dowolnych indeksów m i n zachodziła implikacja $m \mid n \Rightarrow x_m \mid x_n$.

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\angle ABC = \angle ADC = 135^\circ.$$

Punkty M , N leżą odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}$, $AD^{\rightarrow}$ i spełniają warunki $\angle MCD = \angle NCB = 90^\circ$. Okręgi opisane na trójkątach AMN i ABD przecinają się po raz drugi w punkcie $K \neq A$. Udowodnić, że proste AK i KC są prostopadłe.

4. Punkt P jest środkiem boku AC trójkąta ABC . Okrąg k przecina wnętrza odcinków AP , CP , BC i AB odpowiednio w punktach K , L , M i N . Dowieść, że jeżeli S jest środkiem odcinka KL i spełnione są równości

$$2 \cdot AN \cdot AB \cdot CL = 2 \cdot CM \cdot BC \cdot AK = AC \cdot AK \cdot CL,$$

to punkt przecięcia prostych KN i ML leży na symetralnej odcinka PS .

5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o następującej własności: dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych k , m , dla których $k + m \leq n$ liczby $\binom{n-k}{m}$ i $\binom{n-m}{k}$ są jednakowej parzystości.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 6$ oraz rodzina $\mathcal{F}$ złożona z 3-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, która spełnia następujący warunek: dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leq i < j \leq n$ istnieje co najmniej $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ podzbiorów $A \in \mathcal{F}$ takich, że $i, j \in A$. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita $m \geq 1$ oraz parami rozłączne zbiory $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{F}$, dla których

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| \geq n - 5.$$

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ określony jest przez warunki

$$a_1 = 1, a_{2n} = a_n \text{ oraz } a_{2n+1} = (-1)^n a_n \text{ dla } n \geq 1.$$

Wyznaczyć wartość

$$\sum_{n=1}^{2015} a_n a_{n+2}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2015} a_n a_{n+2} &= a_1 a_3 + \sum_{n=1}^{1007} (a_{2n} a_{2n+2} + a_{2n+1} a_{2n+3}) \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{1007} (a_n a_{n+1} + (-1)^n a_n (-1)^{n+1} a_{n+1}) = -1 + \sum_{n=1}^{1007} 0 = -1. \end{aligned}$$

A zatem szukana wartość jest równa -1 .

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , w którym $AB > AC$. Punkt M jest środkiem boku BC , a punkt D środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , który zawiera punkt A . Dowieść, że $\angle ADI = \angle IMC$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez S środek łuku BC niezawierającego punktu A . Wówczas odcinek DS jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC i zarazem symetralną boku BC . W szczególności zawiera on punkt M . Zauważmy, że trójkąty BMS oraz DBS są podobne, gdyż są to trójkąty prostokątne o wspólnym kącie przy wierzchołku S . W szczególności $SB^2 = SM \cdot SD$. Z lematu o trójkącie mamy równość $SI = SB$. Tym samym

$$SI^2 = SB^2 = SM \cdot SD,$$

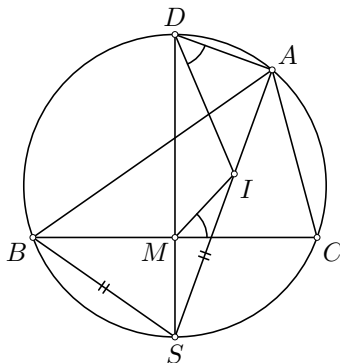
a więc trójkąty SMI oraz SID są podobne. W szczególności,

$$\angle IMC = \angle SMI - 90^\circ = \angle DIS - 90^\circ = (180^\circ - \angle DIA) - 90^\circ = 90^\circ - \angle DIA.$$

Zauważmy jednak, że skoro kąt $\angle IAD$ jest prosty, to

$$90^\circ - \angle DIA = \angle ADI.$$

Udowodniliśmy w ten sposób żadaną równość kątów.



3. Funkcja f prowadząca ze zbioru punktów przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ w ten sam zbiór spełnia warunki:

- dla dowolnych dwóch punktów $A, B \in \mathbb{R}^3$ odległość pomiędzy punktami $f(A)$ i $f(B)$ jest równa odległości pomiędzy A i B ,
- istnieje taka liczba naturalna n , że dla dowolnego punktu A spełniony jest warunek $f^{(n)}(A) = A$ (gdzie $f^{(n)}$ oznacza n -krotne złożenie funkcji f)

Wykazać, że istnieje punkt $A \in \mathbb{R}^3$ taki, że $f(A) = A$.

Rozwiązanie:

Zauważmy na początek, że jeżeli $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ oraz punkt C leży na odcinku AB to $f(C)$ leży na odcinku $f(A)f(B)$. Wynika to z faktu, że punkt C jest jedynym punktem, który jest jednocześnie w odległości $|AC|$ od punktu A i w odległości $|BC|$ od punktu B oraz podobnie, istnieje dokładnie jeden punkt X , który jest w odległości $|AC|$ od punktu $f(A)$ i w odległości $|BC|$ od punktu $f(B)$ (gdyż $|f(A)f(B)| = |AB|$). Mamy więc $f(C) = X$, a X leży oczywiście na odcinku $f(A)f(B)$. Co więcej, jasne jest, że punkt $f(C)$ dzieli odcinek $f(A)f(B)$ w tym samym stosunku co punkt C dzieli odcinek AB .

Za pomocą indukcji po $m \geq 1$ udowodnimy następnie, że dla dowolnego skończonego układu punktów $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^3$, których środkiem ciężkości jest punkt G , środkiem ciężkości układu punktów $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m)$ jest punkt $f(G)$. Dla $m = 1$ nie ma czego dowodzić. Załóżmy zatem, że f przeprowadza środek ciężkości G' punktów $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ na środek ciężkości punktów $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_{m-1})$. Zauważmy, że G leży na odcinku $A_m G'$ i dzieli go w stosunku $1 : (m - 1)$. Z początkowej obserwacji wynika więc,

że punkt $f(G)$ leży na odcinku $f(A_m)f(G')$ i dzieli go również w stosunku $1 : (m - 1)$. Tym samym skoro $f(G')$ jest środkiem ciężkości układu punktów $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_{m-1})$, to $f(G)$ jest środkiem ciężkości układu punktów $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_{m-1}), f(A_m)$. Kończy to dowód indukcyjny.

Ustalmy dowolny punkt $A \in \mathbb{R}^3$ i rozważmy układ punktów

$$A, f(A), f(f(A)), \dots, f^{(n-1)}(A) \in \mathbb{R}^3.$$

Z drugiego założenia danego w zadaniu wynika, że funkcja f przeprowadza ten układ punktów na ten sam układ punktów. Wcześniej udowodniliśmy, że obrazem środka ciężkości G tych punktów jest środek ciężkości obrazów punktów, a więc ponownie punkt G . Innymi słowy, $f(G) = G$, a więc punkt G jest więc szukany punktem stałym funkcji f i dowód jest zakończony.

4. Udowodnić, że liczba

$$\sqrt{1007^2 + 1} + \sqrt{1008^2 + 1} + \dots + \sqrt{2014^2 + 1}$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę daną w zadaniu przez s . Udowodnimy najpierw, że liczba s nie jest całkowita. Zauważmy w tym celu, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$ zachodzą nierówności

$$n < \sqrt{n^2 + 1} < n + \frac{1}{n + 1}.$$

Pierwsza z nich jest oczywista, zaś druga po podniesieniu do kwadratu redukuje się do

$$1 < \frac{2n}{n + 1} + \frac{1}{(n + 1)^2},$$

co jest prawdą, gdyż $2n \geq n + 1$.

W szczególności dla dowolnego $n \in \{1007, 1008, \dots, 2014\}$ prawdziwe są nierówności

$$n < \sqrt{n^2 + 1} < n + \frac{1}{1008}.$$

Wynika stąd, że suma s nie jest liczbą całkowitą, gdyż część ułamkowa każdego z jej 1008 składników jest mniejsza niż $\frac{1}{1008}$. Dowodzi to naszego stwierdzenia.

Udowodnimy następnie, że istnieje wielomian unormowany P o współczynnikach całkowitych taki, że $P(s) = 0$. Stąd już natychmiast otrzymamy tezę zadania, gdyż z twierdzenia o pierwiastku wymiernym wynika, że każdy wymierny pierwiastek wielomianu P jest również całkowity. W szczególności, skoro $s \notin \mathbb{Z}$, to tym samym $s \notin \mathbb{Q}$.

Za pomocą indukcji po n wykażemy ogólniejsze stwierdzenie: dla dowolnych liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_n$ istnieje unormowany wielomian P o współczynnikach całkowitych, dla którego

$$P(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}) = 0.$$

Gdy $n = 1$ wystarczy przyjąć $P(x) = x^2 - a_1$. Załóżmy więc, że $n \geq 2$ oraz istnieje wielomian unormowany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla którego $P(s - \sqrt{a_n}) = 0$, gdzie $s = \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}$. Przyjmijmy, że stopień wielomianu P to r i że zapisuje się on w postaci $P(x) = x^r + \sum_{i=0}^{r-1} c_i x^i$. W szczególności

$$0 = P(s - \sqrt{a_n}) = (s - \sqrt{a_n})^r + \sum_{i=0}^{r-1} c_i (s - \sqrt{a_n})^i.$$

Po rozwinięciu wszystkich potęg ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy równanie postaci

$$s^r + Q(s) + \sqrt{a_n} R(s) = 0,$$

gdzie Q i R są wielomianami o współczynnikach całkowitych stopnia mniejszego niż r . Przenosząc składnik $\sqrt{a_n} R(s)$ na drugą stronę i podnosząc obie strony równości do kwadratu dostajemy

$$s^{2r} + 2s^r Q(s) + (Q(s))^2 = a_n (R(s))^2.$$

W szczególności liczba s jest pierwiastkiem unormowanego wielomianu

$$x^{2r} + 2x^r Q(x) + (Q(x))^2 - a_n (R(x))^2.$$

Kończy to zarówno dowód indukcyjny jak i rozwiązanie zadania.

5. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

jest parzysta.

Rozwiązanie:

Niech $d(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby całkowitej $n \geq 1$. Wykażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$ zachodzi równość

$$d(1) + d(2) + \dots + d(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Istotnie, lewa strona równania zlicza dzielniki kolejnych liczb od 1 do n . Prawa strona natomiast dla każdej liczby $i = 1, 2, \dots, n$ zlicza dla ilu liczb od 1 do n

jest ona jej dzielnikiem, gdyż i jest dzielnikiem każdej z liczb $i, 2i, \dots, \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \cdot i$, czyli dzielnikiem dokładnie $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ z tych liczb. Obie strony równości zliczają więc łączną liczbę dzielników liczb od 1 do n .

Zauważmy dalej, że liczba $d(i)$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy i jest kwadratem liczby całkowitej. Istotnie, wszystkie dzielniki liczby i można pogrupować w pary postaci $\{d, \frac{i}{d}\}$. Nieparzystość liczby dzielników jest zatem równoważna temu, że w pewnej parze znajdzie się dwa razy ta sama liczba, co oznacza, że $i = d^2$. Korzystając z tej obserwacji oraz udowodnionej wcześniej równości otrzymujemy

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = d(1) + d(2) + \dots + d(n) \equiv m \pmod{2},$$

gdzie m oznacza liczbę kwadratów liczb całkowitych w przedziale od 1 do n . Nietrudno jednak zauważyć, że $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Stąd już wynika parzystość sumy danej w zadaniu.

6. Okrąg o o środku w punkcie O jest opisany na ostrokątnym trójkącie ABC . Okrąg o_1 jest styczny do o w punkcie A oraz do prostej BC w punkcie D . Okrąg o_1 przecina proste AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Punkty A_1 i E_1 są odpowiednio odbiciami symetrycznymi punktów A i E względem środka okręgu o_1 . Punkt H jest przecięciem prostych BO i A_1E_1 . Dowieść, że $DF^2 = AF \cdot E_1H$.

Rozwiązanie:

Rozważmy jednokładność o środku w punkcie A , która przekształca okrąg o_1 na o . Obrazami punktów E i F są odpowiednio punkty B i C . Ponieważ środek okręgu o_1 przechodzi na punkt O otrzymujemy w ten sposób równoległość prostych EE_1 oraz BH . Zauważmy dalej, że obrazem punktu D w rozważanej jednokładności jest środek S krótszego łuku BC , gdyż styczna w punkcie S jest równoległa do prostej BC . W szczególności skoro $SB = SC$, to i również $DE = DF$. Ponadto czworokąt AE_1A_1E jest równoległobokiem, a zatem proste BE i E_1H są równoległe. Łącząc to z uzyskaną wcześniej równoległością prostych EE_1 , BH wnioskujemy, iż czworokąt BEE_1H jest równoległobokiem. A zatem $E_1H = BE$ i równość z tezy zadania przepisuje się jako $DF \cdot DE = AF \cdot BE$ lub $\frac{AF}{DF} = \frac{DE}{BE}$. Zauważmy jednak, że

$$\angle BED = 180^\circ - \angle AED = \angle AFD$$

oraz

$$\angle EDB = \angle EAD = \angle DAF,$$

co dowodzi podobieństwa trójkątów AFD oraz DEB . Zatem $\frac{AF}{DF} = \frac{DE}{BE}$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

8. Dane są liczby całkowite dodatnie $m \geq n$ oraz n -wierzchołkowy graf G o m krawędziach. Dla liczby całkowitej $k \geq 3$ niech C_k oznacza liczbę k -elementowych cykli prostych w grafie G . Udowodnić, że

$$\sum_{k=3}^n C_k \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^k \geq 1.$$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego znanego faktu, którego dowód pozostawiamy jako proste ćwiczenie: jeżeli liczba krawędzi w grafie jest większa lub równa liczbie jego wierzchołków, to istnieje w nim co najmniej jeden cykl prosty.

Rozważmy dowolny k -elementowy cykl prosty w grafie G . Zauważmy, że prawdopodobieństwo tego, że wszystkie jego krawędzie należą do wybranych losowo n krawędzi grafu jest równe

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)} \leq \left(\frac{n}{m}\right)^k,$$

gdyż prawdopodobieństwo tego, że pierwsza krawędź została wylosowana jest równe $\frac{n}{m}$, to że druga $\frac{n-1}{m-1}$, itd. Nierówność wynika natomiast z tego, że dla $0 < a < n \leq m$ prawdziwa jest zależność $\frac{n-a}{m-a} \leq \frac{n}{m}$.

Zauważmy dalej, że z faktu przytoczonego na początku wynika, że po wylosowaniu n krawędzi w otrzymanym podgrafie istnieje cykl, czyli prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe 1. Wiemy jednak, że prawdopodobieństwo sumy mnogościowej zdarzeń nie przekracza sumy prawdopodobieństw zdarzeń. Jeżeli ponumerujemy więc wszystkie cykle proste w grafie liczbami od 1 do N i oznaczymy prawdopodobieństwo wylosowania i -go cyklu przez P_i , to dostajemy w ten sposób

$$1 \leq \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{k=3}^n C_k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)} \leq \sum_{k=3}^n C_k \left(\frac{n}{m}\right)^k.$$

Kończy to rozwiązanie zadania.

9. Dla danej liczby całkowitej dodatniej $n \geq 1$ oraz liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ rozważmy wielomiany f i g zadane jako

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k - 1} x^k \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnić, że jeżeli liczby 1 i 2^{n+1} są pierwiastkami g , to f posiada pierwiastek w przedziale $(0, 2^n)$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$g(2x) - g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k - 1} 2^k x^k - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k - 1} x^k = \sum_{k=1}^n a_k x^k = f(x),$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. W szczególności

$$f(1) + f(2) + f(4) + \dots + f(2^n) =$$

$$= (g(2) - g(1)) + (g(4) - g(2)) + \dots + (g(2^{n+1}) - g(2^n)) = g(2^{n+1}) - g(1) = 0.$$

Wśród liczb postaci $f(2^i)$ dla $0 \leq i \leq n$ istnieje więc taka, że $f(2^i) = 0$ lub dwie liczby $f(2^i)$, $f(2^j)$ przeciwnych znaków (gdzie $i < j$). W pierwszym przypadku 2^i jest szukanym pierwiastkiem f , a w drugim przypadku f posiada pierwiastek w przedziale $(2^i, 2^j)$. W obu sytuacjach żądany warunek jest spełniony i rozwiązanie zadania jest zakończone.

10. Niech S oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich, które nie są kwadratami liczb całkowitych. Dla danej liczby $n \in S$ rozważamy wszystkie wybory liczb całkowitych $n < a_1 < a_2 < \dots < a_r$, dla których liczba $n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r$ jest kwadratem liczby całkowitej. Niech $f(n)$ oznacza najmniejszą możliwą liczbę a_r , która pojawia się w tego typu wyborach. Dowieść, że funkcja f , prowadząca z S w zbiór liczb naturalnych, jest różnowartościowa.

Przykład: liczba $2 \cdot 3 \cdot 6$ jest kwadratem liczby całkowitej, ale żadna z liczb $2 \cdot 3$, $2 \cdot 4$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 3 \cdot 4$, $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 4 \cdot 5$, $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ nim nie jest, a zatem $f(2) = 6$.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że tak nie jest. Przyjmijmy więc, że istnieją liczby całkowite dodatnie $a < b$ takie, że $f(a) = f(b) = m$. W szczególności, istnieją zbiory $A \subseteq \{a, a+1, \dots, m\}$ i $B \subseteq \{b, b+1, \dots, m\}$ takie, że $a \in A$, $b \in B$ oraz liczby $\prod_{x \in A} x$, $\prod_{x \in B} x$ są kwadratami liczb całkowitych. Oznaczmy $C = A \cap B$ i rozważmy zbiory $A' = A \setminus C$ oraz $B' = B \setminus C$. Skoro liczba

$$\left(\prod_{x \in A} x \right) \cdot \left(\prod_{x \in B} x \right) = \left(\prod_{x \in (A' \cup B')} x \right) \left(\prod_{x \in C} x \right)^2$$

jest kwadratem liczby całkowitej, to również $\prod_{x \in (A' \cup B')} x$ jest kwadratem liczby całkowitej. Pozostaje zauważyć, że a jest minimalnym elementem zbioru $A' \cup B'$, zaś element maksymalny tego zbioru jest mniejszy od m , skąd wynika nierówność $f(a) < m$. Otrzymaliśmy sprzeczność z początkowym założeniem, która kończy dowód nie wprost.

11. W rzędy tablicy $2^n \times n$ wpisano wszystkie możliwe ciągi o wyrazach ze zbioru $\{-1, 1\}$. Wymazano następnie niektóre liczby z tablicy i zastąpiono je przez 0. Wykazać, że z tablicy można wykreślić pewne k rzędów ($0 \leq k < 2^n$), tak aby w otrzymanej tablicy $(2^n - k) \times n$ suma w każdej kolumnie była równa 0.

Rozwiązanie:

Dla danego n -elementowego ciągu L oraz $1 \leq i \leq n$ niech $L(i)$ oznacza i -ty wyraz ciągu L . Rozwiązanie zaczniemy od zdefiniowania pewnych odwzorowań f i g działających na ciągach n -elementowych. Dla danego n -elementowego ciągu L o wyrazach ze zbioru $\{-1, 1\}$ niech $f(L)$ będzie ciągiem powstałym z L po zamianie pewnych jego wyrazów na 0 (wpisanym w pewien rząd tablicy). Dla danego n -elementowego ciągu L o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$ definiujemy n -elementowy ciąg $g(L)$ jako

$$g(L)(i) = \begin{cases} -1 & \text{gd}y \ L(i) = 1, \\ 1 & \text{gd}y \ L(i) \in \{0, -1\}. \end{cases}$$

Za pomocą tychże odwzorowań oraz zależności rekurencyjnej zdefiniujemy następnie ciąg $(L_n)_{n \geq 0}$ złożony z ciągów n -elementowych. Niech $L_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $L_1 = f((1, 1, \dots, 1))$ oraz $L_{r+1}(i) = L_r(i) + f(g(L_r))(i)$ dla $1 \leq i \leq n$ i $r \geq 1$. Ponieważ g działa na ciągach o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$, aby zweryfikować poprawność definicji musimy sprawdzić, że wyrazy dowolnego z ciągów L_r należą do zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Za pomocą indukcji wykażemy mocniejszą tezę, iż należą one do zbioru $\{0, 1\}$. Istotnie, dla $r = 0$ nie ma czego sprawdzać, zaś dla $r = 1$ ciąg $L_1 = f((1, 1, \dots, 1))$ składa się wyłącznie z zer i jedynek, gdyż powstał on poprzez zamianę pewnych wyrazów ciągu $(1, 1, \dots, 1)$ na zera. Założmy więc, że teza jest prawdziwa dla $r \geq 1$ i udowodnimy ją dla $r + 1$. Jeżeli $f(g(L_r))(i) = 0$ dla pewnego $1 \leq i \leq n$, to oczywiście $L_{r+1}(i) \in \{0, 1\}$, gdyż z założenia indukcyjnego $L_r(i) \in \{0, 1\}$. Jeżeli zaś $f(g(L_r))(i) = -1$, to $g(L_r)(i) = -1$, a więc $L_r(i) = 1$. Stąd $L_{r+1}(i) = 1 - 1 = 0$. W pozostałym przypadku $f(g(L_r))(i) = 1$ mamy $g(L_r)(i) = 1$, czyli $L_r(i) = 0$, gdyż z założenia indukcyjnego $L_r(i) \neq -1$. W efekcie $L_{r+1}(i) = 0 + 1 = 1$.

Ponieważ istnieje jedynie skończona ilość ciągów n -elementowych o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, pewne dwa ciągi L_r i L_s , gdzie $r < s$, powtórzą się. Założmy przy tym, że ze wszystkich takich par (r, s) wybraliśmy parę o minimalnej drugiej współrzędnej. W szczególności, ciągi $L_r, L_{r+1}, \dots, L_{s-1}$ są parami różne. Zauważmy teraz, że dla dowolnego $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} L_s(i) &= L_{s-1}(i) + f(g(L_s))(i) = L_{s-2}(i) + f(g(L_s))(i) + f(g(L_{s-1}))(i) = \\ &= \dots = L_r(i) + f(g(L_s))(i) + f(g(L_{s-1}))(i) + \dots + f(g(L_{r+1}))(i). \end{aligned}$$

Skoro jednak $L_s(i) = L_r(i)$, to dla dowolnego $1 \leq i \leq n$ prawdziwa jest równość

$$f(g(L_s))(i) + f(g(L_{s-1}))(i) + \dots + f(g(L_{r+1}))(i) = 0.$$

W podtablicy wyjściowej tablicy, w której rzędy wpisano ciągi

$$f(g(L_s)), f(g(L_{s-1})), \dots, f(g(L_{r+1}))$$

suma w każdej kolumnie jest zatem równa 0. Kończy to rozwiązanie zadania.

12. Dany jest trójkąt ABC . Punkt M jest środkiem boku BC , a punkt D środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , który zawiera punkt A . Punkty I_1, I_2 to środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty AMB, AMC . Udowodnić, że punkty A, D, I_1, I_2 leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że proste I_1M oraz I_2M to dwusieczne kątów przyległych, stąd $\angle I_1MI_2 = 90^\circ$. Oczywiście $MD \perp BC$. Rozważmy punkty X i Y na prostych odpowiednio MI_1 i MI_2 takie, że

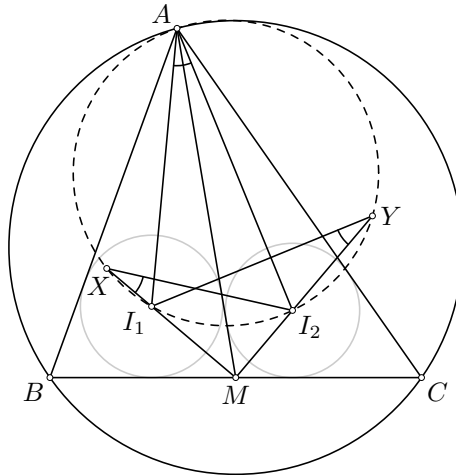
$$\angle MXI_2 = \angle MDC \quad \text{oraz} \quad \angle MYI_1 = \angle MDB.$$

Otrzymujemy stąd, że trójkąty MXI_2 i MDC są podobne. To pozwala napisać, że $\angle XMD = 90^\circ - \angle DMI_2 = \angle I_2MC$ oraz $\frac{XM}{DM} = \frac{I_2M}{CM}$, skąd wnosimy, że trójkąty XDM i I_2CM są podobne. Analogicznie uzyskujemy podobieństwo trójkątów MYI_1 i MDB oraz YDM i I_1BM .

Z powyższych zależności uzyskujemy

$$\begin{aligned} \angle(I_1Y, I_2X) &= \angle MYI_1 = \angle BDM = \frac{1}{2} \angle BAC = \\ &= \frac{1}{2} \angle BAM + \frac{1}{2} \angle MAC = \angle I_1AM + \angle MAI_2 = \angle I_1AI_2, \end{aligned}$$

więc punkty I_1, I_2, Y, A leżą na jednym okręgu. Podobnie uzasadniamy, że I_1, I_2, X, A leżą na jednym okręgu, więc ostatecznie wszystkie te pięć punktów leży na jednym okręgu.



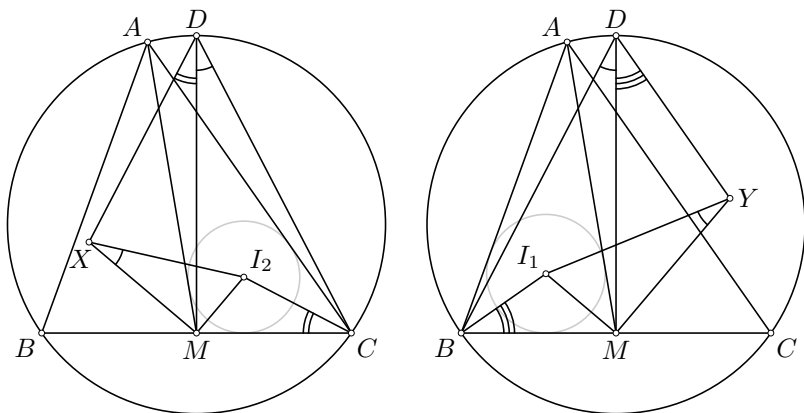
Z otrzymanego wcześniej podobieństwa trójkątów XDM i I_2CM dostajemy

$$\angle XDM = \angle I_2CM = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Analogicznie uzyskamy $\angle YDM = \frac{1}{2}\angle ABC$. Zatem

$$\begin{aligned}\angle XDY &= \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BDC = \angle DCM = \angle XI_2M = \angle(XI_2, YI_2),\end{aligned}$$

stąd punkt D leży na okręgu opisanym na trójkącie XI_2Y — co implikuje tezę zadania.



13. Wyznaczyć wszystkie liczby złożone n , których wszystkie dzielniki większe od 1 można ustawić na okręgu w taki sposób, aby dowolne dwa sąsiadujące dzielniki nie były względnie pierwsze.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że liczba złożona n spełnia dany warunek wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest ona postaci $n = pq$ dla pewnych różnych liczb pierwszych p i q .

Jest jasne, że liczby postaci $n = pq$ nie spełniają danego warunku. Za pomocą indukcji po n udowodnimy, że jeżeli n nie jest liczbą pierwszą i nie jest liczbą postaci $n = pq$, to istnieje żądane ustawienie dzielników. Załóżmy zatem, że istnieje ono dla wszystkich liczb złożonych mniejszych lub równych n , które nie są iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych. Ręcznie można bez trudu rozpatrzyć przypadki $n = p^m$, $n = pqr$ gdzie p , q , r są różnymi liczbami pierwszymi i $m \geq 2$. Możemy więc założyć, że n nie jest żadnej z tych postaci. Wówczas n posiada dzielnik pierwszy p , występujący w rozkładzie n na czynniki pierwsze z potęgą $m \geq 1$, dla którego liczba $\frac{n}{p^m}$ nie jest ani liczbą pierwszą

ani iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych. Z założenia indukcyjnego wynika więc, że dzielniki $d_1, d_2, \dots, d_r$ liczby $\frac{n}{p^m}$, które są większe od 1 można ustawić na okręgu w taki sposób, że dowolne dwa sąsiadujące dzielniki nie są względnie pierwsze. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $\text{NWD}(d_i, d_{i+1}) > 1$ dla $i = 1, 2, \dots, r$ (gdzie $d_{r+1} = d_1$). Zauważmy, że każdy dzielnik liczby n , który nie jest dzielnikiem liczby $\frac{n}{p^m}$ jest postaci p^k lub $p^k d_j$ dla pewnych liczb całkowitych $1 \leq k \leq m$ oraz $1 \leq j \leq r$. Również odwrotnie, każda z liczb tej postaci dzieli n i nie dzieli $\frac{n}{p^m}$. Dzielniki liczby n możemy więc ustawić na okręgu w kolejności $(d_1, p d_1, \dots, p d_2, d_2, d_3, \dots, d_r)$, gdzie pomiędzy liczbami $p d_1$ i $p d_2$ umieszczamy wszystkie pozostałe dzielniki w dowolny sposób. Ponieważ wszystkie one dzielą się przez p , to żądany warunek jest spełniony. Kończy to dowód indukcyjny.

14. Dana jest rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ spełniająca następujące warunki:

- jeżeli $S, S' \in \mathcal{F}$, to $S \cup S' \in \mathcal{F}$ oraz $S \cap S' \in \mathcal{F}$,
- jeżeli $\emptyset \neq S \in \mathcal{F}$, to istnieje podzbiór $T \subseteq S$ taki, że $T \in \mathcal{F}$ oraz T zawiera dokładnie jeden element mniej niż S .

Niech $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(\emptyset) = 0$ oraz

$$f(S \cup S') = f(S) + f(S') - f(S \cap S') \text{ dla dowolnych } S, S' \in \mathcal{F}.$$

Orzec, czy istnieją liczby rzeczywiste $f_1, f_2, \dots, f_n$ takie, że $f(S) = \sum_{i \in S} f_i$ dla dowolnego $S \in \mathcal{F}$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że istnieją liczby rzeczywiste $f_1, f_2, \dots, f_n$ o żądanej własności. Rozważmy dowolny element $1 \leq i \leq n$, który należy do chociaż jednego podzbioru z rodziny $\mathcal{F}$. Zauważmy, że istnieje dokładnie jeden podzbiór $A_i \in \mathcal{F}$ o minimalnej liczbie elementów, dla którego $i \in A_i$. Istotnie, założmy, iż istnieją różne podzbiory $A_i, A'_i \in \mathcal{F}$ o minimalnej mocy, które zawierają i . Wtedy jednak zbiór $A_i \cap A'_i \in \mathcal{F}$ również zawiera i , a jego moc jest mniejsza. Jest to sprzeczność, która dowodzi istnienie jedynego zbioru A_i o żądanej własności.

Z danego warunku wynika, iż dla pewnego $j \in A_i$ zbiór postaci $A_i \setminus \{j\}$ należy do rodziny $\mathcal{F}$. Z minimalności A_i wynika więc, że $j = i$, czyli $A_i \setminus \{i\} \in \mathcal{F}$. Możemy więc przyjąć $f_i = f(A_i) - f(A_i \setminus \{i\})$, gdy i należy do chociaż jednego podzbioru z rodziny $\mathcal{F}$ oraz $f_i = 0$ w przeciwnym wypadku. Udowodnimy, że tak wybrane liczby $f_1, f_2, \dots, f_n$ spełniają warunek $f(S) = \sum_{i \in S} f_i$ dla dowolnego $S \in \mathcal{F}$.

Rozważmy podrodzinę $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tych zbiorów S , które spełniają powyższą równość dla tak dobranych liczb f_i . Za pomocą indukcji po $m = |S|$ wykażemy,

że jeżeli $S \in \mathcal{F}$ to również $S \in \mathcal{F}'$. Załóżmy, więc że dla wszystkich zbiorów o mocy mniejszej niż m teza zachodzi i rozważmy dowolny m elementowy zbiór $S \in \mathcal{F}$.

Zauważmy, że jeżeli $S_1, S_2, S_1 \cap S_2 \in \mathcal{F}'$, to również $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{F}'$. Istotnie

$$\begin{aligned} f(S_1 \cup S_2) &= f(S_1) + f(S_2) - f(S_1 \cap S_2) = \\ &= \sum_{i \in S_1} f_i + \sum_{i \in S_2} f_i - \sum_{i \in S_1 \cap S_2} f_i = \sum_{i \in S_1 \cup S_2} f_i. \end{aligned}$$

Założmy najpierw, że $S = A_i$ dla pewnego elementu i . Zbiór $A_i \setminus \{i\}$ jest elementem rodziny $\mathcal{F}$ i na mocy założenia indukcyjnego jest również elementem rodziny $\mathcal{F}'$. Biorąc to pod uwagę wraz z definicją f_i otrzymujemy

$$f(A_i) = f(A_i \setminus \{i\}) + f_i = \sum_{j \in A_i \setminus \{i\}} f_j + f_i = \sum_{j \in A_i} f_j.$$

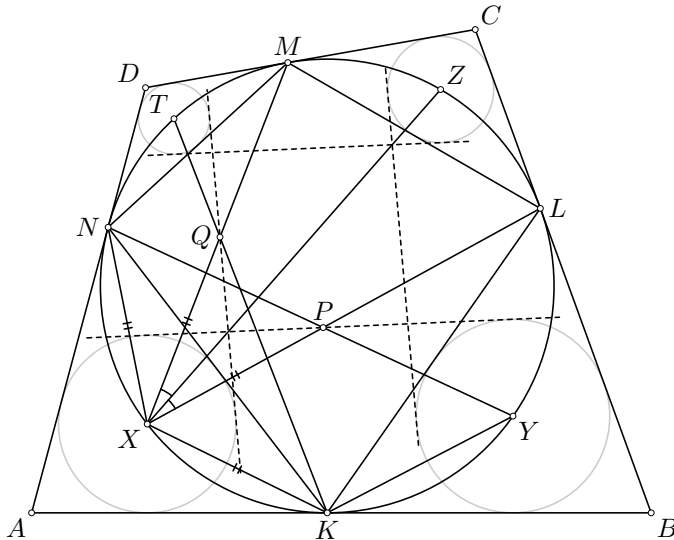
A zatem do $\mathcal{F}'$ należą wszystkie zbiory postaci A_i , których moc nie przekracza m . Załóżmy teraz, że $S \in \mathcal{F}$ jest dowolnym podzbiorem o mocy m . Niech $i \in S$ będzie takim elementem, że $S \setminus \{i\} \in \mathcal{F}$. Zauważmy, że $A_i \subseteq S$, gdyż w przeciwnym wypadku zbiór $A_i \cap S$ byłby zbiorem zawierającym i o mocy mniejszej niż $|A_i|$. Oznaczmy $S_1 = S \setminus \{i\}$, $S_2 = A_i$. Moc zbiorów $S_1, S_1 \cap S_2 \in \mathcal{F}$ jest mniejsza niż m , a zatem należą one do rodziny $\mathcal{F}'$. Zbiór $S_2 = A_i$ należy do $\mathcal{F}'$ na mocy poprzedniego fragmentu rozumowania. Pozostaje zauważyć, że skoro $S_1 \cup S_2 = S$, to również $S \in \mathcal{F}'$. Kończy to dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

15. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu, który jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N . Okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ są wpisane odpowiednio w trójkąty ANK, BKL, CLM, DMN . Niech $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ będą stycznymi zewnętrznymi odpowiednio do par okręgów $(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_4), (\omega_4, \omega_1)$, które są różne od boków czworokąta $ABCD$. Udowodnić, że czworokąt ograniczony przez proste $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ jest rombem.

Rozwiązanie:

Niech X, Y, Z, T będą środkami odpowiednio krótszych łuków NK, KL, LM, MN okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Zachodzą wtedy równości $\angle AKX = \angle KNX = \angle NKX$ i analogicznie $\angle ANX = \angle KNX$, więc punkt X jest środkiem okręgu ω_1 . Podobnie uzasadniamy, że punkty Y, Z, T są środkami odpowiednio okręgów $\omega_2, \omega_3, \omega_4$. Punkt P przecięcia odcinków LX i NY jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt KLN , a punkt Q przecięcia odcinków KT i MX jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt KMN . Z lematu o trójkąciach mamy $KX = PX$ oraz $KY = PY$, skąd wniosek, że symetria względem prostej

XY przeprowadza punkt K na punkt P . Ta sama symetria przeprowadza prostą AB na prostą ℓ_1 , czyli punkt P leży na prostej ℓ_1 . Analogicznie uzasadniamy, że punkt Q leży na prostej ℓ_4 . Ponadto $PX = KX = NX = QX$.



Skoro punkt Z jest środkiem krótszego łuku LM , to $\angle LXZ = \angle MXZ$. Wynika stąd, że symetria względem prostej XZ przeprowadza prostą LX na prostą MX . Z równości $PX = QX$ wynika zaś, że punkt P przechodzi na punkt Q . Ponieważ okrąg ω_1 przechodzi na siebie w tej symetrii, więc styczna ℓ_1 z punktu P do okręgu ω_1 (taką, że odcinek styczny z punktu P do okręgu ω_1 przecina prostą XZ) przechodzi na styczną ℓ_4 z punktu Q do okręgu ω_1 (taką, że odcinek styczny z punktu Q do okręgu ω_1 przecina prostą XZ). Analogicznie uzasadniamy, że w rozważanej symetrii względem prostej XZ prosta ℓ_2 przechodzi na prostą ℓ_3 . Innymi słowy prosta XZ jest osią symetrii czworokąta ograniczonego przez proste $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$. Analogicznie dowodzimy, że prosta YT jest osią symetrii tego czworokąta. To zaś oznacza, że czworokąt ten ma wszystkie boki równe, a więc jest rombem.

16. Wyznaczyć wszystkie pary wielomianów (P, Q) o współczynnikach rzeczywistych, które dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniają warunek

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1.$$

Rozwiązanie:

Załóżmy najpierw, że stopień wielomianów P i Q nie przekracza 1, tzn. że można je zapisać w postaci $P(x) = ax + b$ oraz $Q(x) = cx + d$ dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c, d . Dane równanie przybiera wówczas postać

$$(ax + b)(cx + c + d) - (ax + a + b)(cx + d) = bc - ad = 1.$$

Równość $bc - ad = 1$ jest zatem równoważna danemu warunkowi dla wielomianów rozważanej postaci. Udowodnimy, że są to wszystkie rozwiązania zadania również w przypadku ogólnym.

Załóżmy, że $P(x)$ jest wielomianem stopnia n o współczynniku wiodącym a_n i współczynniku przy x^{n-1} równym a_{n-1} , zaś $Q(x)$ jest wielomianem stopnia m o współczynniku wiodącym b_m i współczynniku przy x^{m-1} równym b_{m-1} . Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona łatwo zweryfikować, iż współczynnik przy x^{n-1} w wielomianie $P(x+1)$ jest równy $na_n + a_{n-1}$. Analogicznie, współczynnik przy x^{m-1} w wielomianie $Q(x+1)$ jest równy $mb_m + b_{m-1}$. Zatem współczynnik przy x^{m+n-1} w wielomianie $P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x)$ jest równy

$$a_n(mb_m + b_{m-1}) + b_m a_{n-1} - b_m(na_n + a_{n-1}) - a_n b_{m-1} = a_n b_m(m - n).$$

Z równości danej w zadaniu wynika, że jeżeli tylko $m+n-1 > 0$, to współczynnik ten jest równy 0, czyli $m = n$. W przypadku $m+n-1 = 0$ dochodzimy do sytuacji rozważanej w poprzednim fragmencie rozumowania. Jeżeli istnieje więc para wielomianów (P, Q) , która spełnia dany warunek i z których co najmniej jeden posiada stopień większy niż 1, to $\deg P = \deg Q = n \geq 2$. Rozważmy teraz wielomian $Q_0(x) = Q(x) - \frac{b_n}{a_n}P(x)$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & P(x)Q_0(x+1) - P(x+1)Q_0(x) \\ &= P(x)Q(x+1) - \frac{b_n}{a_n}P(x)P(x+1) - P(x+1)Q(x) + \frac{b_n}{a_n}P(x)P(x+1) \\ &= P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że para wielomianów (P, Q_0) również spełnia warunek dany w zadaniu. Co więcej, łatwo sprawdzić, że stopień Q_0 jest mniejszy od n , a jednocześnie założyliśmy, że $n \geq 2$. Para wielomianów (P, Q_0) o różnych stopniach spełnia więc dany warunek i $\deg P \geq 2$. Jest to sprzeczność z poprzednim fragmentem rozumowania. Wielomiany postaci $P(x) = ax + b$, $Q(x) = cx + d$, gdzie $bc - ad = 1$ stanowią więc jedyne rozwiązanie zadania.

17. Punkt D leży na tym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC , który nie zawiera punktu C . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi D odpowiednio na boki AB i AC , zaś M i N to odpowiednio środki odcinków BC i PQ . Wykazać, że proste DN i MN są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Skoro $\angle DPA = \angle DQA = 90^\circ$, to punkty D, P, Q, A leżą na okręgu o średnicy AD . Zauważmy, że w tej sytuacji

$$\angle PQD = \angle PAD = \angle BCD$$

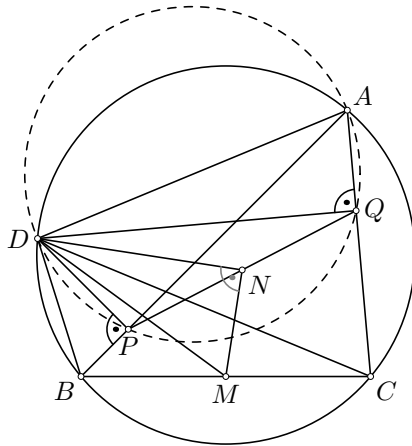
i podobnie

$$\angle PDQ = \angle QAP = \angle CDB,$$

co dowodzi, że trójkąty DPQ i DBC są podobne. Ponieważ $\angle DPN = \angle DBM$ oraz

$$\frac{DP}{PN} = \frac{2DP}{DQ} = \frac{2DB}{BC} = \frac{DB}{BM},$$

więc trójkąty DPN i DBM również są podobne. To zaś oznacza, że $\frac{DP}{DN} = \frac{DB}{DM}$ oraz $\angle BDM = \angle PDN$, skąd $\angle BDP = \angle MDN$. W takim razie trójkąty DBP i DMN są podobne, więc $\angle DNM = \angle DPB = 90^\circ$.



18. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita $0 < a < \sqrt{p} + 1$, że dla dowolnej liczby całkowitej x liczba $x^2 - a$ nie dzieli się przez p .

Rozwiązanie:

Resztę a modulo p nazywamy *resztą kwadratową*, gdy istnieje liczba całkowita x taka, że $p \mid a - x^2$. W przeciwnym razie a nazywamy *nieresztą kwadratową*. Musimy więc wykazać, że najmniejsza niereszta kwadratowa modulo p jest mniejsza niż $\sqrt{p} + 1$.

Zauważmy, że jeżeli a jest nieresztą kwadratową modulo p , zaś b jest niezerową resztą kwadratową modulo p , to ab jest nieresztą kwadratową modulo p . Jeżeli bowiem $b \equiv x^2 \pmod{p}$ oraz $ab \equiv y^2 \pmod{p}$, to $a \equiv (yx^{-1})^2 \pmod{p}$, gdzie x^{-1} oznacza odwrotność x modulo p . Przeczy to założeniu, że a jest nieresztą kwadratową, co dowodzi, że ab jest nieresztą kwadratową.

Oznaczmy przez a najmniejszą nieresztę kwadratową modulo p w przedziale $(0, p)$ i załóżmy, że $a \geq \sqrt{p} + 1$. W szczególności wszystkie reszty $1, 2, \dots, a - 1$ są resztami kwadratowymi. Ponadto

$$a(a - 1) \geq (\sqrt{p} + 1)\sqrt{p} > p.$$

Możemy zatem wybrać najmniejszą liczbę naturalną n w przedziale $[1, a - 1]$, dla której $an > p$. Zauważmy, że wówczas $p < an < p + a$. W przeciwnym bowiem razie prawdziwa byłaby nierówność $a(n - 1) < p$, a to przeczyłoby wyborowi n jako minimalnej liczbie o tej własności.

Skoro a jest nierozkładalową kwadratową, zaś n jest resztą, to an jest nierozkładalową kwadratową. Z powyższej nierówności wynika jednak, że reszta z dzielenia przez p liczby an znajduje się w przedziale $(0, a)$. Przeczy to wyborowi a jako najmniejszej nierozkładalowej. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

19. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ liczb dodatnich. Dowieść, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych dodatnich n zachodzi nierówność $1 + a_n > a_{n-1} \sqrt[n]{2}$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n . W szczególności dla $n \geq 1$ zachodzi nierówność $1 + \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}$. Wystarczy więc wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych dodatnich n mamy $1 + a_n > a_{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_{n-1} \frac{n+1}{n}$.

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że począwszy od $n = N \geq 1$ zachodzi nierówność przeciwna. Dla dowolnego $m \geq 0$ mamy wówczas

$$\begin{aligned} a_{m+N} &\leq a_{m+N-1} \frac{m+N+1}{m+N} - 1 \leq a_{m+N-2} \frac{m+N}{m+N-1} \cdot \frac{m+N+1}{m+N} - \\ &\quad - \frac{m+N+1}{m+N} - 1 = a_{m+N-2} \frac{m+N+1}{m+N-1} - 1 - \frac{m+N+1}{m+N}. \end{aligned}$$

Kontynuując dalej w ten sposób otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{m+N} &\leq a_{N-1} \frac{m+N+1}{N} - 1 - \frac{m+N+1}{m+N} - \frac{m+N+1}{m+N-1} - \dots - \frac{m+N+1}{N+1} = \\ &= (m+N+1) \left(\frac{a_{N-1}}{N} - \frac{1}{m+N+1} - \frac{1}{m+N} - \frac{1}{m+N-1} - \dots - \frac{1}{N+1} \right). \end{aligned}$$

Wykażemy, że dla odpowiednio dużego m wyrażenie w nawiasie jest ujemne, skąd otrzymamy, że $a_{m+N} < 0$. Da to sprzeczność z danym założeniem i zakończy dowód nie wprost.

Wynika to ze znanego faktu z analizy: szereg harmoniczny $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ jest rozbieżny. W szczególności, szereg złożony z jego wyrazów z pominięciem N początkowych również jest rozbieżny. Dla odpowiednio dużego m zachodzi więc nierówność

$$\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{m+N+1} \geq a_{N-1} \geq \frac{a_{N-1}}{N}$$

i rozwiązanie zadania jest zakończone.

20. W wierzchołkach $2n$ -kąta foremnego zostały wpisane liczby ze zbioru $\{0, 1\}$, przy czym każdej z nich użyto dokładnie n razy. Możemy wykonać jeden obrót całego układu wpisanych liczb o kąt będący całkowitą wielokrotnością $\frac{\pi}{n}$ i liczbę wpisaną w każdym wierzchołku zastąpić iloczynem liczb przed i po obrocie. Wyznaczyć największą stałą $\alpha \geq 0$ o następującej własności: dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dla dowolnego początkowego wpisania liczb w wierzchołki $2n$ -kąta istnieje obrót, po którym w co najmniej αn wierzchołkach wielokąta znajduje się liczba 0.

Rozwiązanie:

Przeformułujemy zadanie w języku reszt z dzielenia przez $2n$. Oznaczmy przez S zbiór n reszt modulo $2n$, które odpowiadają numerom miejsc na okręgu, w które wpisana została liczba 0. Obrót o kąt $\frac{k\pi}{n}$ odpowiada dodaniu do wszystkich reszt w S liczby k , oznaczmy otrzymany w ten sposób zbiór reszt przez $S+k$. Naszym celem jest wyznaczenie największej stałej $\alpha \geq 0$, która posiada następującą własność: dla dowolnego zbioru S złożonego z n reszt modulo $2n$ istnieje liczba $0 \leq k \leq 2n-1$, dla której łączna liczba różnych reszt modulo $2n$ w zbiorze $S \cup (S+k)$ wynosi co najmniej αn . Udowodnimy, że $\alpha = \frac{3}{2}$.

W pierwszej kolejności wykazemy, że $\alpha \geq \frac{3}{2}$. Dla danej liczby całkowitej $0 \leq k \leq 2n-1$ oznaczmy przez x_k liczbę reszt w zbiorze $S+k$, które nie należą do zbioru S . Zauważmy, że dla ustalonej reszty $t \notin S$ istnieje dokładnie n liczb $k \in [0, 2n-1]$, dla których $t \in S+k$ — dla każdej reszty $s \in S$ istnieje bowiem dokładnie jedno k takie, że $s+k \equiv t \pmod{2n}$. Z jednej strony, łączna liczba reszt, która nie należy do S i pojawia się w zbiorze $S+k$ przy pewnym k jest równa $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}$ (licząc z powtórzeniami). Z drugiej strony każda ustalona reszta spoza S pojawi się co najmniej n razy. Ponieważ takich reszt jest n otrzymujemy oszacowanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} \geq n^2,$$

z którego wynika, że $x_k \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$ dla pewnego $0 \leq k \leq 2n-1$. W zbiorze $S \cup (S+k)$ pojawia się zatem co najmniej $n + \frac{n}{2} = \frac{3}{2}n$ różnych reszt modulo $2n$. Dowodzi to nierówności $\alpha \geq \frac{3}{2}$.

Przypomnijmy, że dla danej liczby pierwszej p resztę a modulo p nazywamy *resztą kwadratową*, gdy istnieje liczba całkowita x taka, że $p \mid a - x^2$. Rozważmy zbiór $R \subseteq \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ złożony z wszystkich reszt kwadratowych modulo p . Zawiera on $\frac{p+1}{2}$ elementów. Aby wykazać przeciwną nierówność $\alpha \leq \frac{3}{2}$ wykazemy następujący

Lemat. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą oraz $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas istnieje co najmniej $\frac{p-1}{4}$ par $(x, y) \in R \times R$, dla których $x - y \equiv k \pmod{p}$.

Dowód lematu. Jeżeli $k \equiv 0 \pmod{p}$, to nie ma czego dowodzić, gdyż każda para postaci (x, x) stanowi rozwiązanie danej kongruencji. Załóżmy więc, że p nie dzieli k i ustalmy $a \in \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. Zauważmy, że biorąc

$$x \equiv \left(\frac{k+a^2}{2a}\right)^2 \pmod{p}, y \equiv \left(\frac{k-a^2}{2a}\right)^2 \pmod{p}$$

otrzymujemy

$$\left(\frac{k+a^2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{k-a^2}{2a}\right)^2 = \frac{4a^2k}{4a^2} \equiv k \pmod{p}.$$

Oczywiście reszty $\left(\frac{k \pm a^2}{2a}\right)^2$ są resztami kwadratowymi. Zauważmy ponadto, że jeżeli dla $1 \leq a_1 < a_2 \leq \frac{p-1}{2}$ spełniona jest kongruencja

$$\left(\frac{k+a_1^2}{2a_1}\right)^2 \equiv \left(\frac{k+a_2^2}{2a_2}\right)^2 \pmod{p},$$

to ze wzoru na różnicę kwadratów dostajemy, że

$$\frac{k+a_1^2}{2a_1} \equiv \frac{k+a_2^2}{2a_2} \pmod{p}$$

lub

$$\frac{k+a_1^2}{2a_1} \equiv -\frac{k+a_2^2}{2a_2} \pmod{p}.$$

Przekształcając równoważnie pierwszą z tych kongruencji otrzymujemy zależność $2(a_1 - a_2)(k - a_1a_2) \equiv 0 \pmod{p}$, a stąd $a_2 \equiv \frac{k}{a_1} \pmod{p}$. Analogicznie druga kongruencja przepisuje się jako $2(a_1 + a_2)(k + a_1a_2) \equiv 0 \pmod{p}$ co daje tym razem $a_2 \equiv -\frac{k}{a_1} \pmod{p}$. Widzimy więc, że jeśli dla $a_1 < a_2$ otrzymujemy ten sam zapis k w postaci różnicy reszt kwadratowych, to $a_2 \equiv \pm \frac{k}{a_1} \pmod{p}$, ale tylko jedna z tych dwóch reszt znajduje się w zbiorze $\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. Oznacza to, że biorąc różne a z tego zbioru otrzymujemy co najmniej $\frac{p-1}{4}$ różnych zapisów k w postaci różnicy reszt kwadratowych. Kończy to dowód lematu.

Rozważmy teraz $n = p$ dla liczby pierwszej $p > 2$. Niech

$$S_0 = \{2x : 0 \leq x \leq p-1, x \text{ jest resztą kwadratową modulo } p\}$$

$$S_1 = \{2x+1 : 0 \leq x \leq p-1, x \text{ jest resztą kwadratową modulo } p\}.$$

Rozważmy zbiór $S = S_1 \cup S_2$ reszt modulo $2p$. Ponieważ istnieje dokładnie $\frac{p+1}{2}$ reszt kwadratowych modulo p , zbiór S zawiera $p+1$ elementów. Ustalmy dowolne $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2p-1\}$ i oszacujmy od góry liczbę różnych reszt modulo

$2p$ w zbiorze $S \cup (S+k)$. Wystarczy w tym celu oszacować od dołu liczbę różnych reszt w zbiorze $S \cap (S+k)$, gdyż te dwie liczby sumują się do $2p+2$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, w którym $k = 2\ell$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ . Każda reszta w przecięciu $S_0 \cap (S_0 + 2\ell)$ odpowiada takim resztom $x, y \in S_0$, że $x - y \equiv 2\ell \pmod{2p}$. Zapisując jednak $x = 2x_1$ i $y = 2y_1$ dana kongruencja sprowadza się do przystawania $x_1 - y_1 \equiv \ell \pmod{p}$, gdzie x_1, y_1 są resztami kwadratowymi modulo p . Z udowodnionego lematu wynika istnienie co najmniej $\frac{p-1}{4}$ różnych par $(x_1, y_1) \in S_0 \times S_0$ o tej własności. Oznacza to, że zbiór, $S_0 \cap (S_0 + 2\ell)$ zawiera co najmniej $\frac{p-1}{4}$ różnych reszt modulo $2p$. W analogiczny sposób dowodzimy, że zbiór $S_1 \cap (S_1 + 2\ell)$ zawiera co najmniej $\frac{p-1}{4}$ różnych reszt. Są to reszty różnej parzystości, a więc w efekcie dostajemy, że w zbiorze $S \cap (S + 2\ell)$ znajduje się co najmniej $\frac{p-1}{2}$ różnych reszt modulo $2p$.

W przypadku $k = 2\ell + 1$ postępujemy podobnie, dowodząc tym razem, iż w zbiorach $S_0 \cap (S_1 + 2\ell + 1)$, $S_1 \cap (S_0 + 2\ell + 1)$ znajduje się co najmniej po $\frac{p-1}{4}$ różnych reszt modulo $2p$, przy czym w pierwszym przecięciu występują wyłącznie reszty parzyste, a w drugim reszty nieparzyste. A więc i w tym wypadku zbiór $S \cap (S + 2\ell + 1)$ zawiera co najmniej $\frac{p-1}{2}$ różnych reszt modulo $2p$.

Oznacza to, że dla dowolnego $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2p-1\}$ w zbiorze $S \cup (S+k)$ znajduje się co najwyżej $2p+2 - \frac{p-1}{2} = \frac{3}{2}p + \frac{5}{2}$ różnych reszt modulo $2p$. Jeżeli ze zbioru S usuniemy dowolny element to powstały zbiór oczywiście również ma tę własność. To dowodzi, że $\alpha \leq \frac{3}{2}$, a więc w efekcie $\alpha = \frac{3}{2}$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

21. Niech E będzie sumą mnogościową pewnej skończonej liczby kół otwartych na płaszczyźnie. Udowodnić, że z tych kół można wybrać parami rozłączne koła $K_1, K_2, \dots, K_n$ takie, że

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n 3K_i,$$

gdzie jeżeli K jest kołem otwartym o środku S i promieniu r , to $3K$ jest kołem otwartym o środku S i promieniu $3r$.

Rozwiązanie:

Niech K_1 będzie kołem o maksymalnym promieniu z danej rodziny kół. Niech K_2 będzie kołem o maksymalnym promieniu, które jest rozłączne z K_1 . Podobnie, niech K_3 będzie kołem o maksymalnym promieniu, które jest rozłączne z K_1 i K_2 . Kontynuując w ten sposób dopóki jest to możliwe otrzymujemy ciąg parami rozłącznych kół $K_1, K_2, \dots, K_n$. Wykażemy, że posiada on żadaną własność.

Rozważmy dowolny element $x \in E$ i udowodnijmy, że $x \in \bigcup_{i=1}^n 3K_i$. Istnieje takie koło K , że $x \in K$. Jeżeli $K = K_i$ dla pewnego $1 \leq i \leq n$, to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym wypadku, z konstrukcji kół $K_1, K_2, \dots, K_n$

wynika, że istnieje takie koło K_i , którego promień jest nie mniejszy niż promień K oraz $K_i \cap K \neq \emptyset$. Wówczas oczywiście $K \subseteq 3K_i$, a więc $x \in 3K_i$. Kończy to rozwiązanie zadania.

22. Dowieść, że zbiór rozwiązań nierówności

$$\sum_{k=1}^{2013} \frac{k}{x-k} \geq \frac{2013}{2}$$

jest sumą rozłącznych przedziałów o łącznej długości równej 1007.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2, \dots, 2013\} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną jako

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2013} \frac{k}{x-k} - \frac{2013}{2}.$$

Funkcja $f(x)$ przyjmuje wyłącznie ujemne wartości dla argumentów ze zbioru $(-\infty, 1)$. Dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leq n \leq 2012$ oraz $1 \leq k \leq 2013$ funkcja $\frac{x}{x-k}$ jest ściśle malejąca na przedziale $(n, n+1)$. Funkcja $f(x)$ jest zatem również ściśle malejąca na każdym przedziale tej postaci. Zauważmy ponadto, że $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = +\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow (n+1)^-} f(x) = -\infty$. W szczególności w każdym przedziale postaci $(n, n+1)$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x_n , dla której $f(x_n) = 0$. Co więcej, skoro $\lim_{x \rightarrow 2013^+} f(x) = +\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{2013}{2}$, a jednocześnie funkcja f jest ściśle malejąca na przedziale $(2013, +\infty)$, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x_{2013} w tym przedziale, dla której $f(x_{2013}) = 0$. Z monotoniczności wynika ponadto, że funkcja f jest nieujemna dokładnie na przedziałach $(n, x_n]$ dla $n = 1, 2, \dots, 2013$. Naszym celem jest zatem wyznaczenie wartości

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \dots + (x_{2013} - 2013) = (x_1 + x_2 + \dots + x_{2013}) - 2013 \cdot 1007.$$

Zauważmy, że każda z liczb x_n jest pierwiastkiem wielomianu

$$\frac{2013}{2} \prod_{j=1}^{2013} (x-j) - \sum_{k=1}^{2013} k \prod_{j \neq k}^{2013} (x-j).$$

Ponieważ jest to wielomian stopnia 2013 liczby $x_1, x_2, \dots, x_{2013}$ stanowią jego wszystkie pierwiastki. Aby wyznaczyć ich sumę możemy zastosować wzory Viete'a. Współczynnik przy x^{2013} w powyższym wielomianie jest równy $\frac{2013}{2}$, zaś przy x^{2012} wynosi on

$$-\frac{2013}{2} \sum_{k=1}^{2013} k - \sum_{k=1}^{2013} k = -\frac{1007 \cdot 2013 \cdot 2015}{2}.$$

Ze wzorów Viete'a wynika więc równość

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2013} = 1007 \cdot 2015.$$

Ostatecznie

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{2013}) - 2013 \cdot 1007 = 2014,$$

co należało udowodnić.

23. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkty E i F to odpowiednio punkty przecięcia prostych AC z BD oraz AD z BC . Okręgi opisane na trójkątach ADE i BCE przecinają się w punkcie $G \neq E$. Wykazać, że $\angle AFE = \angle GFB$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\angle GAD = 180^\circ - \angle DEG = \angle BEG = \angle BCG = 180^\circ - \angle GCF,$$

skąd wniosek, że na czworokącie $AGCF$ można opisać okrąg. Analogicznie uzasadniamy, że na czworokącie $BGDF$ można opisać okrąg. W takim razie

$$\angle GAC = \angle GFC = \angle GFB = \alpha \quad \text{oraz} \quad \angle GCA = \angle GBD = \angle GFD = \beta.$$

Niech M będzie środkiem odcinka CD . Z twierdzenia Talesa dostajemy, że $\frac{AD}{AF} = \frac{BC}{BF}$. W takim razie

$$\frac{DM}{CM} \cdot \frac{BC}{BF} \cdot \frac{AF}{AD} = 1,$$

więc na mocy twierdzenia Cevy dla trójkąta CDF proste AC , BD i FM przecinają się w punkcie E .

Niech teraz $\angle AFE = \alpha'$ i $\angle BFE = \beta'$. Z twierdzenia sinusów dla trójkątów DFM i CFM otrzymujemy

$$\frac{DM}{DF} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \angle DMF} \quad \text{oraz} \quad \frac{CM}{CF} = \frac{\sin \beta'}{\sin \angle CMF}.$$

Stąd dostajemy

$$\frac{CF}{DF} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'}.$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta AGC otrzymujemy

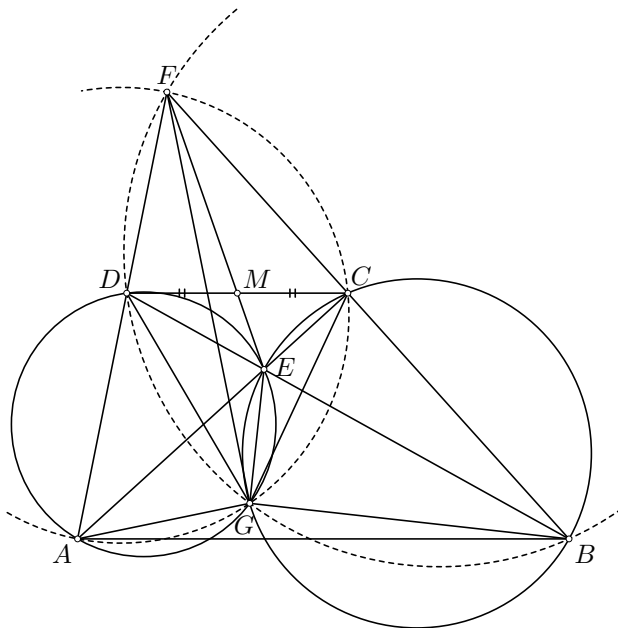
$$\frac{GC}{AG} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Ponadto z równości $\angle GAC = \angle GDB$ i $\angle GCA = \angle GBD$ wynika, że trójkąty AGC i DGB są podobne. Stąd otrzymujemy, że

$$\angle AGD = \angle AGC - \angle DGC = \angle BGD - \angle DGC = \angle BGC$$

oraz $\frac{AG}{DG} = \frac{CG}{BG}$, więc trójkąty AGD i CGB są podobne. Zatem $\frac{GC}{AG} = \frac{BC}{AD}$. Z powyższych zależności i twierdzenia Talesa możemy napisać

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{GC}{AG} = \frac{BC}{AD} = \frac{CF}{DF} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'}.$$



Pozostaje zauważyć, że wobec równości $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \varphi$ oraz monotoniczności funkcji $\frac{\sin x}{\sin(\varphi - x)}$ w przedziale $(0, \varphi)$, gdzie $\varphi < \pi$ (o czym nietrudno się przekonać licząc pochodną), otrzymujemy $\alpha = \alpha'$, co kończy rozwiązanie.

24. Dany jest ciąg $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ zadany poprzez warunki $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, k istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że $F_n \equiv a \pmod{5^k}$.

Rozwiązanie:

Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią a . Za pomocą indukcji po $k \geq 1$ udowodnimy istnienie liczby naturalnej $n \geq 2k + 1$, dla której $F_n \equiv a \pmod{5^k}$. Dla $k = 1$ wystarczy rozważyć liczby F_n dla $n \in \{3, 4, 5, 8, 9\}$. Załóżmy zatem,

że $F_n \equiv a \pmod{5^k}$ dla pewnej liczby całkowitej $n \geq 2k + 1$. Zauważmy, że wystarczy wykazać, iż liczby ze zbioru

$$S = \{F_{n+t \cdot 5^k} : 1 \leq t \leq 5\}$$

dają parami różne reszty z dzielenia przez 5^{k+1} oraz że wszystkie one przystają do a modulo 5^k . Wówczas bowiem dokładnie jedna z nich przystaje do a modulo 5^{k+1} i oczywiście w każdym przypadku indeks jest większy niż $2k + 3$. Aby to udowodnić wykorzystamy wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu Fibonacciego (zwany *wzorem Bineta*)

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \binom{n}{2i+1} 5^i = \\ &= \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{5}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2} \binom{n}{2i+3} 5^i. \end{aligned}$$

W dalszej części rozwiązania będziemy posługiwali się zapisem reszt modulo 5^k w postaci $\frac{x}{y}$. Przypomnijmy, że jeżeli y nie dzieli się przez 5, to przez $\frac{x}{y}$ rozumiemy jedyną taką resztę z , że $zy \equiv x \pmod{5^k}$.

Skoro $n \geq 2k + 1$, to i również $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \geq k - 1$, a zatem

$$F_n \equiv \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{5}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{2i+3} 5^i \pmod{5^k}.$$

Wykażemy teraz, że jeżeli $m \in S$, to

$$\binom{n}{2i+3} 5^i \equiv \binom{m}{2i+3} 5^i \pmod{5^k}.$$

Zauważmy bowiem, że dla ustalonego $0 \leq i \leq k - 1$ zachodzi równość

$$\binom{n}{2i+3} 5^i = \frac{An(n-1) \dots (n-2i-2)}{B}$$

dla pewnych $A, B \in \mathbb{Z}$ takich, że liczba B nie dzieli się przez 5. Dla $i \in \{0, 1\}$ jest to jasne, zaś dla $i \geq 1$ wynika to z faktu, że liczba 5 dzieli liczbę $(2i+3)!$ w potęgach

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{2i+3}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2i+3}{5^2} \right\rfloor + \dots &< (2i+3) \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{4}(2i+3) \leq i. \end{aligned}$$

Żądane przystawanie wynika zatem z pomnożenia stronami przez $\frac{A}{B}$ oczywistej kongruencji

$$n(n-1)\dots(n-2i-2) \equiv m(m-1)\dots(m-2i-2) \pmod{5^k}.$$

Zauważmy dalej, że $4 \cdot 5^k \mid m-n$ dla dowolnego $m \in S$. Skoro $4 \cdot 5^k = \varphi(5^{k+1})$, to z twierdzenia Eulera wynika więc przystawanie $2^{m-1} \equiv 2^{n-1} \pmod{5^{k+1}}$. Łącząc to z udowodnioną wcześniej kongruencją otrzymujemy

$$\frac{5}{2^{m-1}} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m}{2i+3} 5^i \equiv \frac{5}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{2i+3} 5^i \pmod{5^{k+1}},$$

(zwróćmy uwagę na czynnik 5 przed sumą). Dla dowolnego $m \in S$ mamy oczywiście $n \equiv m \pmod{5^k}$ i w efekcie

$$\frac{m}{2^{m-1}} + \frac{5}{2^{m-1}} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m}{2i+3} 5^i \equiv \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{5}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{2i+3} 5^i \pmod{5^k},$$

co daje nam $F_m \equiv F_n \pmod{5^k}$. Co więcej, jeżeli $m_1, m_2 \in S$ oraz $m_1 \neq m_2$, to $m_1 \not\equiv m_2 \pmod{5^{k+1}}$. Ponieważ wszystkie pozostałe wyrażenia w rozważanych sumach dla m_1 i m_2 dają tę samą resztę z dzielenia przez 5^{k+1} , mamy w szczególności $F_{m_1} \not\equiv F_{m_2} \pmod{5^{k+1}}$. Udowodniliśmy w ten sposób, iż liczby ze zbioru S dają parami różne reszty z dzielenia przez 5^{k+1} i że przystają one do a modulo 5^k . Kończy to dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

25. Dla danej liczby całkowitej dodatniej n niech $p(n)$ oznacza liczbę liczb w przedziale $[1, n]$, które można przedstawić w postaci a^k dla pewnej liczby naturalnej a oraz liczby całkowitej $k \geq 2$. Dowieść, że dla nieskończenie wielu n , liczba $\frac{n}{p(n)}$ jest całkowita.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0$. Zauważmy w tym celu, że dla ustalonej liczby całkowitej $k \geq 2$ istnieje dokładnie $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor$ liczb w przedziale $[1, n]$, które można zapisać w postaci a^k . Co więcej, jeżeli dla pewnego k liczba a^k należy do przedziału $[1, n]$ oraz $a \geq 2$, to $k \leq \log_2 n$. Otrzymujemy zatem nierówność

$$p(n) \leq \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \dots + {}^{\log_2 n} \sqrt{n} \leq \log_2 n \sqrt{n}.$$

A zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} = 0$.

Rozważmy teraz dowolną liczbę całkowitą $m \geq 1$. Wykażemy, że istnieje liczba naturalna n , dla której $\frac{n}{p(n)} = m$. Z poprzedniego fragmentu wynika, że dla odpowiednio dużych n zachodzi nierówność $\frac{p(n)}{n} < \frac{1}{m}$. Rozważmy zatem największą liczbę naturalną N , dla której $\frac{p(N)}{N} \geq \frac{1}{m}$. Jeżeli zachodzi równość,

to teza jest spełniona. Przyjmijmy więc, że prawdziwa jest nierówność ostra. Mamy wówczas

$$\frac{p(N)}{N} > \frac{1}{m} > \frac{p(N+1)}{N+1}.$$

Wtedy jednak z jednej strony

$$N+1 > mp(N+1) \geq mp(N),$$

a z drugiej $mp(N) > N$. Jest to sprzeczność, gdyż liczba $mp(N)$ jest całkowita. To dowodzi, że $\frac{N}{p(N)} = m$ i kończy rozwiązanie zadania.

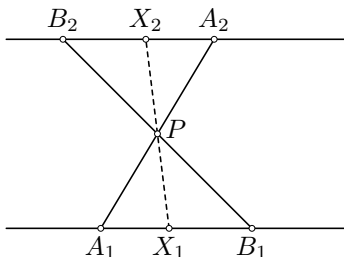
26. Dany jest wielokąt wypukły W oraz punkt P w jego wnętrzu o następującej własności: dowolna prosta przechodząca przez P dzieli obwód W na dwie równe części. Udowodnić, że wielokąt W jest środkowosymetryczny.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że prosta k przechodząca przez P przecina dwa boki wielokąta W w ich punktach wewnętrznych A_1, A_2 . Obracając prostą k w punkcie P o odpowiednio mały kąt otrzymujemy prostą, która w dalszym ciągu przecina te same boki W w ich wnętrzu w punktach B_1, B_2 . Ponieważ obie te proste dzielą obwód na połowy zachodzi równość długości odcinków $A_1B_1 = A_2B_2$. Rozważmy teraz prostą, która jest dwusieczną kątów A_1PB_1 oraz A_2PB_2 i załóżmy, że przecina ona odcinki A_1B_1, A_2B_2 odpowiednio w punktach X_1, X_2 . Ponieważ ona również dzieli obwód na połowę zachodzą równości odcinków $A_1X_1 = A_2X_2$ oraz $B_1X_1 = B_2X_2$. Z twierdzenia o dwusiecznej mamy więc

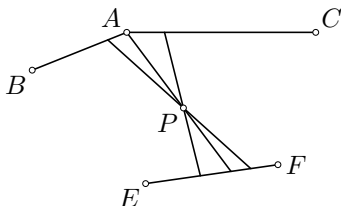
$$\frac{A_1P}{B_1P} = \frac{A_1X_1}{B_1X_1} = \frac{A_2X_2}{B_2X_2} = \frac{A_2P}{B_2P}.$$

Zatem trójkąty A_1PB_1 i A_2PB_2 są podobne, gdyż $\angle A_1PB_1 = \angle A_2PB_2$. To dowodzi, że proste A_1B_1 i A_2B_2 , a więc również odpowiadające boki wielokąta W , są równoległe.



Wykażemy teraz, że prosta przechodząca przez P i pewien wierzchołek A wielokąta W nie może przecinać żadnego innego boku w jego punkcie wewnętrznym. Załóżmy bowiem, że AB i AC są bokami W o końcu w A oraz prosta AP

przecina pewien bok EF w jego punkcie wewnętrznym. Obracając prostą AP w punkcie P o odpowiednio mały kąt raz zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a raz przeciwnie dostajemy proste, które przecinają pary boków (AB, EF) oraz (AC, EF) w ich punktach wewnętrznych. Z poprzedniego fragmentu rozumowania wynika więc, że $AB \parallel EF \parallel AC$, co oczywiście jest niemożliwe.



Rozważmy więc ostatecznie dowolne dwa boki A_1B_1 , A_2B_2 wielokąta W , które są jednocześnie przecinane przez pewną prostą przechodzącą przez P w ich punktach wewnętrznych. Z poprzedniego fragmentu rozumowania wynika, że wierzchołki tych odcinków są współliniowe z P . Bez straty ogólności, przyjmijmy, że na jednej prostej leżą punkty A_1 , P , A_2 oraz B_1 , P , B_2 . Z własności połowienia obwodu mamy wówczas $A_1B_1 = A_2B_2$. Ponieważ proste A_1B_1 , A_2B_2 są równoległe, czworokąt $A_1B_1A_2B_2$ jest równoległobokiem o środku symetrii w punkcie P . Pozostaje zauważyć, że oznacza to, iż P jest środkiem symetrii całego wielokąta — bok A_1B_1 można bowiem wybrać dowolnie. To kończy dowód.

27. Dana jest n -wymiarowa szachownica o wymiarach $k \times k \times \dots \times k$. Na niektórych jej polach stoją wieże. Mówimy, że dwie wieże się biją, gdy stoją na polach, które mają wspólną pewną współrzędną. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej s , spośród $sk^{n-1} + 1$ wież na szachownicy można wybrać $s + 1$, z których żadne dwie się nie biją.

Rozwiązanie:

Każde pole na danej n -wymiarowej szachownicy można utożsamić z n -elementowym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Dwie wieże stojące na polach, które odpowiadają ciągom $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ biją się wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $1 \leq i \leq n$ zachodzi równość $x_i = y_i$. Musimy więc wykazać, że z dowolnego zbioru $sk^{n-1} + 1$ ciągów n -elementowych o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ można wybrać $s + 1$, w taki sposób, że dowolne dwa z wybranych ciągów różnią się na każdej współrzędnej.

Powiemy, że dwa ciągi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ są *zgodne* jeśli istnieje taka liczba całkowita r , że $y_i \equiv x_i + r \pmod{k}$ dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$. Oczywiście każdy ciąg jest zgodny sam ze sobą i jest to relacja symetryczna. Łatwo ponadto zauważyć, jeżeli zgodne są ciągi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ oraz $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ z $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, to ciągi o wyrazach x_i , z_i również są zgodne. Oznacza to, że zbiór wszystkich ciągów n -elementowych o wyrazach ze

zbioru $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ można podzielić na klasy, w taki sposób, że dwa ciągi należą do jednej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy są zgodne. Ponieważ wszystkich rozważanych ciągów jest k^n , a dla danego ciągu istnieje dokładnie k ciągów z nim zgodnych (licząc również jego), to takich klas jest dokładnie k^{n-1} . Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, że z dowolnego zbioru $sk^{n-1}+1$ ciągów pewnie $s+1$ znajduje się w jednej klasie, czyli są one parami zgodne. Pozostaje zauważyć, że dwa różne ciągi zgodne różnią się na każdej współrzędnej. Kończy to rozwiązanie zadania.

28. Wykazać, że dla dowolnej funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieją liczby rzeczywiste x, y takie, że

$$f(x - f(y)) > yf(x) + x.$$

Rozwiązanie:

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest nierówność $f(x - f(y)) \leq yf(x) + x$. Podstawiając $x + f(y)$ za x otrzymujemy

$$f(x) \leq yf(x + f(y)) + x + f(y), \quad (1)$$

co dla $y = 0$ daje $f(x) \leq x + f(0)$. W szczególności, jeżeli $x \leq -f(0)$, to $f(x) \leq 0$.

Niech $r = -1 - f(0)$. Udowodnimy, że jeżeli $y > 0 \geq f(y)$, to $y \leq r - f(r)$. Istotnie, podstawiając $x = r$ do równości 1 dostajemy

$$f(r) \leq yf(r + f(y)) + r + f(y) \leq y(r + f(y) + f(0)) + r \leq y(r + f(0)) + r = -y + r,$$

skąd bezpośrednio wynika żądana nierówność. Wykazaliśmy w ten sposób, że jeżeli $c = \max\{r - f(r), 0\} + 1$ oraz $x \geq c$, to $f(x) > 0$.

Weźmy teraz dowolną liczbę rzeczywistą y , taką, że $y < \min\{-f(0), -\frac{c}{f(c)}\}$ oraz przyjmijmy $x = c - f(y)$. Ponieważ $y < -f(0)$ mamy $f(y) \leq 0$, a więc również $x \geq c$. Liczba $f(x)$ jest zatem dodatnia. Z wyjściowego równania mamy jednak

$$f(x) = f(c - f(y)) \leq yf(c) + c \leq 0,$$

co oznacza, że liczba $f(x)$ jest niedodatnia. Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód nie wprost i rozwiązanie zadania.

29. Dany jest skończony zbiór osób S o następującej własności: dowolne dwie osoby o tej samej liczbie znajomych w S nie mają wspólnych znajomych w S . Udowodnić, że jeżeli w S istnieje osoba, która ma przynajmniej jednego znajomego, to w S istnieje również osoba, która posiada dokładnie jednego znajomego.

Rozwiązanie:

Rozważmy osobę A ze zbioru S , która posiada maksymalną możliwą liczbę n znajomych. Z założenia zadania wynika, że $n > 0$. Oznaczmy znajomych A jako $A_1, A_2, \dots, A_n$ i zauważmy, że dla dowolnych $1 \leq i < j \leq n$ osoby A_i, A_j posiadają różne liczby znajomych — A jest bowiem ich wspólnym znajomym. Oczywiście, każda osoba A_i posiada niezerową liczbę znajomych, gdyż A jest jej znajomym. Co więcej, żadna z osób A_i nie posiada więcej niż n znajomych, gdyż przeczyłoby to wyborowi A . Skoro liczba znajomych każdej z n osób A_i należy do zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ i żadne dwie osoby nie posiadają tej samej liczby znajomych, to istnieje osoba A_i , która posiada dokładnie jednego znajomego. Kończy to dowód.

30. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c , dla których liczba $a^2 - bc$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że liczba $2a + b + c$ jest złożona.

Rozwiązanie:

Niech $a^2 - bc = x^2$ dla pewnej liczby całkowitej $x \geq 0$ oraz załóżmy, że $2a + b + c = p$ dla pewnej liczby pierwszej p . Odejmując $b + c$ od obu stron równości i podnosząc do kwadratu dostajemy zależność

$$4a^2 = (b + c)^2 - 2p(b + c) + p^2.$$

Wykorzystując pierwszą równość otrzymujemy

$$4x^2 + 4bc = (b + c)^2 - 2p(b + c) + p^2,$$

czyli

$$4x^2 = (b - c)^2 - 2p(b + c) + p^2$$

lub ostatecznie

$$(2x - b + c)(2x + b - c) = p(p - 2b - 2c).$$

W szczególności p dzieli jeden z czynników występujących po lewej stronie równości. Ze względu na symetrię zadania względem b i c możemy założyć, że $p \mid 2x - b + c$. Zauważmy, że liczba $2x - b + c$ nie jest równa 0, gdyż czynniki występujące po prawej stronie równości są różne od 0 (p jest liczbą pierwszą większą od 2, a więc nie jest równa liczbie parzystej $2b + 2c$). Załóżmy najpierw, że $2x + b - c > 0$. Z podzielności $p \mid 2x - b + c$ wynika w tej sytuacji oszacowanie $p \leq 2x - b + c$. Z nierówności $a > x$ dostajemy jednak

$$2a + b + c = p \leq 2x - b + c < 2a - b + c < 2a + b + c,$$

co oznacza sprzeczność. Jeśli zaś $2x + b - c < 0$, to

$$2a + b + c = p \leq -2x + b - c$$

co daje nam $2a + 2c + 2x < 0$, a to jest oczywiście niemożliwe. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

31. Dana jest liczba rzeczywista $a \geq 3$ i wielomian P stopnia n o współczynnikach rzeczywistych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej $0 \leq i \leq n + 1$ zachodzi nierówność $|a^i - P(i)| \geq 1$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że dla dowolnej liczby całkowitej $0 \leq i \leq n$ zachodzi nierówność $|a^i - P(i)| \leq 1$. Udowodnimy, że wówczas $|a^{n+1} - P(n+1)| \geq 1$.

Zastosujemy **wzór interpolacyjny Lagrange’a** dla wielomianu P w punktach $0, 1, 2, \dots, n$. Wynika z niego równość

$$P(x) = \sum_{i=0}^n P(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{x-j}{i-j} = \sum_{i=0}^n P(a_i) \frac{\prod_{j \neq i} (x-j)}{(-1)^{n-i} i! (n-i)!}.$$

W szczególności

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \sum_{i=0}^n P(a_i) \frac{\prod_{j \neq i} (n+1-j)}{(-1)^{n-i} i! (n-i)!} = \sum_{i=0}^n P(a_i) \frac{(n+1)!}{(-1)^{n-i} i! (n-i+1)!} = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} P(a_i) \binom{n+1}{i}. \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} |P(n+1) - a^{n+1}| &= \left| P(n+1) - (a-1)^{n+1} - \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} a^i \binom{n+1}{i} \right| = \\ &= \left| \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} (P(a_i) - a^i) \binom{n+1}{i} - (a-1)^{n+1} \right| \geq \\ &\geq (a-1)^{n+1} - \sum_{i=0}^n |P(a_i) - a^i| \binom{n+1}{i} \geq (a-1)^{n+1} - \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} \geq \\ &\geq 2^{n+1} - (2^{n+1} - 1) = 1. \end{aligned}$$

Kończy to rozwiązanie zadania.

32. Punkt P należy do tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , do którego nie należy punkt A . Punkty I_1, I_2 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty PAB i PAC . Dowieść, że przy ustalonych punktach A ,

B , C i zmieniającym się punkcie P , okręgi opisane na trójkątach PI_1I_2 mają punkt wspólny.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że proste PI_1 i PI_2 przecinają okrąg o opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach X i Y . Z lematu o trójiściu mamy $I_1X = AX$ i $I_2Y = AY$. Załóżmy, że okrąg opisany na trójkącie PI_1I_2 przecina okrąg o w punkcie $S \neq P$. Zachodzą równości

$$\angle I_1XS = \angle PXS = \angle PYS = \angle I_2YS$$

oraz

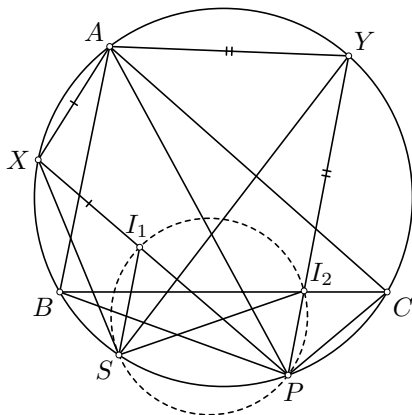
$$\angle XI_1S = 180^\circ - \angle PI_1S = 180^\circ - \angle PI_2S = \angle YI_2S,$$

skąd wynika, że trójkąty XI_1S i YI_2S są podobne. W takim razie

$$\frac{XS}{YS} = \frac{XI_1}{YI_2} = \frac{AX}{AY}.$$

Jeśli teraz okrąg opisany na trójkącie PI_1I_2 jest styczny do okręgu o , to przyjmijmy $S = P$ i korzystając z jednokładności w punkcie S przeprowadzającej jeden z tych okręgów na drugi również uzyskujemy

$$\frac{XS}{YS} = \frac{XI_1}{YI_2} = \frac{AX}{AY}.$$



Jeśli $AX = AY$, to $XS = YS$, więc punkt S jest punktem przecięcia symetralnej odcinka XY z okręgiem o , różnym od A . W przeciwnym przypadku punkt S jest drugim punktem przecięcia okręgu Apoloniusza dla punktów X i Y przechodzącego przez punkt A z okręgiem o . Ponieważ punkty X i Y są stałe (są to środki odpowiednio łuków AB i AC nie zawierających pozostałych wierzchołków trójkąta ABC), to otrzymany punkt jest szukany punktem wspólnym wszystkich rozważanych w treści zadania okręgów.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $n^7 + 7$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Założmy, że dla pewnych liczb całkowitych dodatnich n , x zachodzi równość $n^7 + 7 = x^2$. Zauważmy, że skoro kwadraty liczb całkowitych dają resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 4, to n dają resztę 1 z dzielenia przez 4. Jeśli bowiem $2 \mid n$, to $n^7 + 7 \equiv 3 \pmod{4}$. Jeśli zaś $n \equiv 3 \pmod{4}$, to $n^7 + 7 \equiv 3 + 7 \equiv 2 \pmod{4}$. Dowodzi to, że $n \equiv 1 \pmod{4}$. Mamy również

$$\begin{aligned} n^7 + 128 &= n^7 + 2^7 = (n + 2)(n^6 - 2n^5 + 4n^4 - 8n^3 + 16n^2 - 32n + 64) = \\ &= x^2 + 121 = x^2 + 11^2. \end{aligned}$$

Liczba $n + 2$ dają resztę 3 z dzielenia przez 4, a zatem posiada również dzielnik pierwszy p o tej własności. Wykażemy, że $p = 11$. Istotnie, założymy, że $p \neq 11$. Skoro $p \mid x^2 + 11$, to oczywiście p nie dzieli x . Kongruencję

$$x^2 \equiv -(11)^2 \pmod{p}$$

możemy więc podnieść stronami do nieparzystej potęgi $\frac{p-1}{2}$ i skorzystać z małego twierdzenia Fermata otrzymując

$$1 \equiv x^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} (11)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $p = 11$.

W szczególności mamy więc $n \equiv -2 \pmod{11}$. W tej sytuacji

$$\begin{aligned} A &= n^6 - 2n^5 + 4n^4 - 8n^3 + 16n^2 - 32n + 64 \equiv \\ &\equiv 2^6 + 2^6 + \dots + 2^6 \equiv 7 \cdot 2^6 \not\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Co więcej

$$A \equiv n^6 - 2n^5 \equiv 1 - 2 \equiv 3 \pmod{4},$$

a zatem A posiada dzielnik pierwszy q , który jest postaci $4k + 3$. Ponieważ 11 nie dzieli A mamy $q \neq 11$. Skoro jednak $q \mid x^2 + 11^2$, to możemy dojść do sprzeczności postępując analogicznie jak w poprzednim fragmencie rozumowania. Kończy to dowód nie wprost.

2. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$$

jest złożona.

Rozwiązanie:

Niech $k \geq 0$ będzie najwyższą potęgą liczby 2, która dzieli n . Wykażemy, że liczba $10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$ dzieli się przez liczbę $10^{2^k} + 1$.

Zapiszmy w tym celu n w postaci $n = 2^k \cdot m$, gdzie m jest liczbą nieparzystą. Wówczas

$$10^n = 10^{m \cdot 2^k} \equiv (-1)^m \equiv -1 \pmod{10^{2^k} + 1}.$$

Co więcej

$$10^{10^n} = 10^{10^{m \cdot 2^k}} = \left(10^{2^k}\right)^r,$$

gdzie $r = \frac{10^{m \cdot 2^k}}{2^k} = 5^{m \cdot 2^k} \cdot 2^{m \cdot 2^k - k}$ jest liczbą parzystą, gdyż $m \cdot 2^k - k \geq 0$ dla dowolnych liczb całkowitych $k \geq 0$ oraz $m \geq 1$. A zatem

$$10^{10^n} \equiv (-1)^r \equiv 1 \pmod{10^{2^k} + 1}.$$

W podobny sposób dowodzimy przystawanie $10^{10^{10^n}} \equiv 1 \pmod{10^{2^k} + 1}$. Mamy więc

$$10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1 \equiv 1 + 1 - 1 - 1 \equiv 0 \pmod{10^{2^k} + 1}.$$

Pozostaje zauważyć, że skoro

$$1 < 10^{2^k} + 1 \leq 10^n + 1 < 10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1,$$

to liczba $10^{2^k} + 1$ jest nietrywialnym dzielnikiem liczby $10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$. Kończy to dowód.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony zbiór S liczb całkowitych dodatnich o następującej własności: dla dowolnych liczb $a, b \in S$ takich, że $a \neq b$ liczba $a+b$ nie posiada dzielnika będącego kwadratem liczby całkowitej większej od 1.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że istnieje zbiór S o żądanych własnościach. Przypomnijmy, że jeśli liczba całkowita dodatnia n nie ma dzielnika będącego kwadratem liczby całkowitej większej od 1, to nazywamy ją *bezkwadratową*. Wykażemy, że istnieje nieskończony ciąg liczb całkowitych dodatnich $1 = a_1 < 2 = a_2 < a_3 < \dots$ taki, że liczba $a_i + a_j$ jest bezkwadratowa dla dowolnych indeksów $i \neq j$.

Konstrukcja tego ciągu będzie przebiegać indukcyjnie. Załóżmy, że liczby $1 = a_1 < 2 = a_2 < a_3 < \dots < a_k$ spełniają żądany warunek dla $k \geq 2$. Wystarczy dowieść, że można dobrać liczbę całkowitą dodatnią a_{k+1} w taki sposób, że liczby $a_i + a_{k+1}$ są bezkwadratowe dla $i = 1, 2, \dots, k$.

Będziemy rozważać a_{k+1} postaci $a_{k+1} = 1 + Mx$, dla

$$M = ((a_1 + a_2 + \dots + a_k + 2k)!)^2$$

i pewnej liczby całkowitej dodatniej x . Ustalmy $1 \leq i \leq k$. Z wyboru liczby M wynika podzielność $1 + a_i \mid M$. Zauważmy ponadto, że liczby $\frac{Mx}{1+a_i} + 1$ oraz M są względnie pierwsze. Załóżmy bowiem, że istnieje liczba pierwsza p taka, że $p \mid M$ oraz $p \mid \frac{Mx}{1+a_i} + 1$. Z wyboru liczby M łatwo widać, że każdy dzielnik pierwszy liczby $1 + a_i$ występuje w rozkładzie M z potęgą przynajmniej dwukrotnie większą. W szczególności, jeżeli $p \mid M$, to również $p \mid \frac{Mx}{1+a_i}$. Otrzymujemy więc, że $p \mid 1$, czyli sprzeczność. Dowodzi to naszego stwierdzenia.

Dla dowolnego $1 \leq i \leq k$ mamy

$$a_i + a_{k+1} = 1 + a_i + Mx = (1 + a_i) \left(\frac{Mx}{1 + a_i} + 1 \right).$$

Jeżeli powyższa liczba nie jest bezkwadratowa, to posiada ona dzielnik postaci p^2 dla pewnej liczby pierwszej p . Jest on dzielnikiem liczby $\frac{Mx}{1+a_i} + 1$, gdyż na mocy założenia indukcyjnego liczba $1 + a_i = a_1 + a_i$ jest bezkwadratowa. W szczególności, skoro liczby $\frac{Mx}{1+a_i} + 1$, M są względnie pierwsze, to $p > 2k$.

Rozważmy x z przedziału $[1, N]$ dla pewnej dużej liczby naturalnej N . Uodwnimy, że dla odpowiedniego wyboru x liczba $a_i + a_{k+1}$ jest bezkwadratowa dla dowolnego $1 \leq i \leq k$. Jeżeli liczba x nie spełnia tego warunku, to istnieje indeks $1 \leq i \leq k$ oraz liczba pierwsza p taka, że $p^2 \mid 1 + Mx + a_i$. Łącząc nierówność

$$p^2 \leq 1 + Mx + a_i < M(N + 1)$$

z poprzednią obserwacją dostajemy obustronne oszacowanie

$$2k < p < \sqrt{M(N + 1)}.$$

Jasne jest, że w przedziale $[1, N]$ istnieje co najwyżej $\frac{N}{p^2} + 1$ wartości x , dla których $p^2 \mid 1 + Mx + a_i$. Możemy zatem oszacować od góry liczbę tych x , które nie spełniają żadanego warunku przez wyrażenie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{p=2k+1}^{\sqrt{M(N+1)}-1} \left(\frac{N}{p^2} + 1 \right) &= k \cdot \sum_{p=2k+1}^{\sqrt{M(N+1)}-1} \left(\frac{N}{p^2} + 1 \right) < \\ &< k \cdot \left(N \sum_{p>2k} \frac{1}{p^2} + \sum_{p<\sqrt{M(N+1)}} 1 \right). \end{aligned}$$

Zauważmy jednak, że dla dowolnej liczby całkowitej $p > 1$ prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{p^2} < \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$. W szczególności

$$\sum_{p>2k} \frac{1}{p^2} < \sum_{p>2k} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) + \dots < \frac{1}{2k}.$$

Zachodzi więc nierówność

$$k \cdot \left(N \sum_{p > 2k} \frac{1}{p^2} + \sum_{p < \sqrt{M(N+1)}} 1 \right) < \frac{N}{2} + k\sqrt{M(N+1)}.$$

Pozostaje zauważyć, że skoro liczby k i M są ustalone, to dla odpowiednio dużej liczby naturalnej N powyższe wyrażenie jest mniejsze niż N . W przedziale $[1, N]$ istnieje wówczas liczba x , która spełnia żądany warunek. Kończy to rozwiązanie zadania.

4. W tablicy

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

takiej, że $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ dla $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie 2014 razy. Dowieść, że dla pewnej pary $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ zachodzi nierówność $a_{m,n} > mn$.

Rozwiązanie:

Dla dowodu nie wprost załóżmy, iż dla dowolnej pary $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ zachodzi nierówność $a_{m,n} \leq mn$. Wykorzystamy znany fakt analizy matematycznej: szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ odwrotności kolejnych liczb naturalnych jest rozbieżny. Z owego faktu wynika w szczególności istnienie liczby naturalnej N , dla której $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > 2015$.

Rozważmy liczbę par $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, dla której prawdziwa jest nierówność $a_{m,n} \leq N$. Z jednej strony każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, N\}$ pojawia się w danej tablicy dokładnie 2014 razy, a więc owa nierówność spełniona jest dla dokładnie $2014N$ par $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Z drugiej strony liczba takich par jest nie mniejsza niż liczba par $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, dla których $mn \leq N$. Łatwo zauważyć, że dla ustalonego n w zakresie od 1 do N możemy dobrać dokładnie $\lfloor \frac{N}{n} \rfloor$ liczb naturalnych m tak, aby spełniona była nierówność $mn \leq N$. Zliczając po wszystkich n od 1 do N otrzymujemy, iż liczba takich par jest równa

$$\sum_{n=1}^N \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor \geq \sum_{n=1}^N \left(\frac{N}{n} - 1 \right) = N \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 1 \right) > 2014N.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód nie wprost.

5. Udowodnić, że dla liczb dodatnich $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)(1 + \sqrt[4]{abcd})^4 \geq 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d).$$

Rozwiązanie:

Wykażemy następujący

Lemat. Dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x+y}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{(1+\sqrt{xy})^2}.$$

Dowód lematu. Po przemnożeniu przez mianowniki i uproszczeniu wyrazów podobnych dana nierówność sprowadza się do postaci

$$x^2y + xy^2 + x + y \geq 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{xy}.$$

Pozostaje zauważyć, że na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną prawdziwe są zależności

$$x^2y + xy^2 \geq 2\sqrt{x^2y \cdot xy^2} = 2\sqrt{x^3y^3} \quad \text{oraz} \quad x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

Dowodzi to lematu.

Przechodzimy do głównej części rozwiązania. Korzystając z lematu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} &= \frac{a+b}{(1+a)(1+b)} \frac{c+d}{(1+c)(1+d)} (b+c)(a+d) \geq \\ &\geq \frac{2\sqrt{ab}}{(1+\sqrt{ab})^2} \cdot \frac{2\sqrt{cd}}{(1+\sqrt{cd})^2} \cdot (b+c)(a+d) = \frac{4\sqrt{abcd}(b+c)(a+d)}{(1+\sqrt{ab})^2(1+\sqrt{cd})^2}. \end{aligned}$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wynika, że $(b+c)(a+d) \geq (\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2$. Łącząc to z udowodnionym przez nas lematem dla $x = \sqrt{ab}$ oraz $y = \sqrt{cd}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{abcd}(b+c)(a+d)}{(1+\sqrt{ab})^2(1+\sqrt{cd})^2} &\geq \frac{4\sqrt{abcd}(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2}{(1+\sqrt{ab})^2(1+\sqrt{cd})^2} \geq \\ &\geq \frac{(4\sqrt{abcd}) \cdot (2\sqrt[4]{abcd})^2}{(1+\sqrt[4]{abcd})^4} = \frac{16abcd}{(1+\sqrt[4]{abcd})^4}. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq \frac{16abcd}{(1+\sqrt[4]{abcd})^4},$$

co jest równoważne tezie zadania.

6. Szachownicę $n \times n$ pokryto trójkątami o wierzchołkach w punktach kratowych i o polu równym $\frac{1}{2}$. Dowieść, że co najmniej $2n$ z tych trójkątów jest prostokątnych.

Rozwiązanie:

Udowodnimy następujący

Lemat. Jeżeli wierzchołki trójkąta ABC znajdują się w punktach kratowych i jego pole jest równe $\frac{1}{2}$, to trójkąt ABC nie jest ostrokątny.

Dowód lematu. Przyjmijmy, że współrzędne punktów A , B , C , to odpowiednio $(0, 0)$, (x, y) , (a, b) i założmy, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Wówczas iloczyn skalarny dowolnej pary boków jest dodatni, co możemy przepisać w postaci nierówności

$$ax + by > 0, \quad -x(a - x) - y(b - y) > 0, \quad -a(x - a) - b(y - b) > 0$$

lub równoważnie

$$ax + by > 0, \quad x^2 + y^2 > ax + by, \quad a^2 + b^2 > ax + by.$$

Ze wzoru na pole trójkąta wiemy ponadto, że $|ay - bx| = 1$. Wykorzystując znaną tożsamość na iloczyn sum kwadratów otrzymujemy

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (ax + by)^2 + 1.$$

Skoro wszystkie liczby a , b , x , y są całkowite, to z drugiej strony mamy jednak

$$\begin{aligned} (ax + by)^2 + 1 &\leq (x^2 + y^2 - 1)(a^2 + b^2 - 1) + 1 = \\ &= (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) + (1 - (x^2 + y^2)) + (1 - (a^2 + b^2)) \leq (x^2 + y^2)(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Powyższe nierówności są więc w rzeczywistości równościami. W szczególności

$$ax + by = x^2 + y^2 - 1 = a^2 + b^2 - 1 = 0,$$

a to jest niemożliwe, gdyż liczba $ax + by$ jest dodatnia. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu.

W pierwszym kroku właściwiej części rozwiązania pokażemy jak przekształcić podane pokrycie szachownicy trójkątami w pokrycie o tej samej liczbie trójkątów prostokątnych, a składające się jedynie z dwóch typów trójkątów: prostokątnego o bokach $1, 1, \sqrt{2}$ lub trójkąta o bokach $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$.

Ze wszystkich trójkątów występujących w pokryciu wybierzmy trójkąt ABC , którego jeden z boków posiada maksymalną możliwą długość, niech będzie to bok AB . Oczywiście długość odcinka AB jest większa niż 1 , a więc w szczególności jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$ i AB nie jest odcinkiem zawartym w pewnej krawędzi szachownicy. **Wzór Picka** gwarantuje, trójkąt o polu $\frac{1}{2}$ i wierzchołkach w punktach kratowych nie posiada punktów kratowych wewnątrz ani na bokach. Odcinek AB jest zatem bokiem jeszcze jednego trójkąta w rozważanym

podziale, niech będzie to trójkąt ABD . Wykażemy, że czworokąt $CADB$ jest równoległobokiem. Wystarczy w tym celu dowieść, że po jednej stronie prostej AB istnieje dokładnie jeden trójkąt o polu $\frac{1}{2}$ którego AB jest najdłuższym bokiem — wierzchołki tych trójkątów leżące po przeciwnych stronach AB są bowiem symetryczne względem środka AB . Załóżmy przeciwnie i niech X , Y będą takimi punktami leżącymi po jednej stronie AB , że $[ABX] = [ABY] = \frac{1}{2}$ oraz $AB \geq \max\{AX, BX, AY, BY\}$ (gdzie przez $[W]$ oznaczamy pole wielokąta W). Proste XY i AB są równoległe. Możemy założyć, że w trapezie $ABYX$ odcinki AY , BX są przekątnymi. Wówczas z nierówności trójkąta łatwo wynika nierówność $AB + XY < AY + BX$, a stąd $XY < AB$. Zauważmy teraz, że

$$[ABXY] = \frac{AB + XY}{2} \cdot h < AB \cdot h = 1,$$

gdzie h jest długością wysokości w trójkątach ABX oraz ABY . Czworokąt $ABXY$ jest więc czworokątem o wierzchołkach w punktach kratowych i polu mniejszym niż 1, co daje sprzeczność ze wzorem Picka. Wykazaliśmy w ten sposób, że czworokąt $CADB$ jest równoległobokiem.

Z udowodnionego przez nas lematu wynika, że trójkąt ABC nie jest ostrokątny. Jeżeli $AB \leq \sqrt{5}$, to wszystkie trójkąty w podziale są jednego z rozważanych przez nas typów, a zatem w tym wypadku nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $AB > \sqrt{5}$. Trójkąt CAD jest wówczas trójkątem rozwartokątnym i $CD < AB$, gdyż kąt rozwarty w równoległoboku $CADB$ znajduje się na przeciwko przekątnej AB , gdyż jest to najdłuższy bok w rozwartokątnym trójkącie ABC . Dzieląc więc równoległobok $CADB$ wzdłuż przekątnej CD otrzymujemy podział na dwa trójkąty, w których najdłuższy bok jest krótszy niż AB . Ponieważ trójkąty te nie są prostokątne, łączna liczba trójkątów prostokątnych w podziale nie wzrasta. Powtarzając tę operację wielokrotnie dochodzimy do sytuacji, w której nasz podział składa się z trójkątów prostokątnych o bokach $1, 1, \sqrt{2}$ lub równoległoboków o bokach $1, \sqrt{2}$ i przekątnej długości $\sqrt{5}$. Liczba trójkątów prostokątnych jest przy tym taka sama jak na początku.

Rozważmy teraz graf, którego wierzchołki tworzą boki wszystkich n^2 kwadratów występujących na szachownicy, zaś dwa boki połączone są krawędzią, jeżeli tworzą one przyprostokątne pewnego trójkąta prostokątnego, który występuje w pokryciu lub tworzą one przeciwległe boki równoległoboku występującego w pokryciu. Wówczas każdy odcinek, który nie leży na obwodzie szachownicy jest połączony z dokładnie dwoma innymi odcinkami. Z kolei każdy odcinek zawarty w obwodzie szachownicy połączony jest z dokładnie jednym innym bokiem. Nasz graf składa się więc z układu rozłącznych ścieżek i cykli, przy czym ścieżki zaczynają się i kończą na bokach szachownicy. Ze względu na konstrukcję grafu łatwo ponadto zauważyć, że jeżeli ścieżka zaczyna i kończy się na tym boku szachownicy, to znajdują się na niej co najmniej dwa trójkąty prostokątne. Podobnie, jeżeli ścieżka łączy nierównoległe krawędzie szachownicy,

to zawiera ona co najmniej jeden trójkąt prostokątny.

Rozważmy dwa przypadki. W pierwszym z nich założmy, że istnieje ścieżka łącząca równoległe boki szachownicy. Wówczas nie istnieje ścieżka łącząca pozostałe boki. Rozważmy dowolną spójną składową (czyli ścieżkę lub cykl) naszego grafu, która zaczyna się na jednym z tych dwóch pozostałych boków. Albo łączy ona ten bok z samym sobą i zawiera w tym przypadku co najmniej dwa trójkąty prostokątne, albo zaczyna się na tej krawędzi i kończy na nierównoległej, czyli zawiera przy najmniej jeden trójkąt prostokątny. W obu przypadkach na każdy z $2n$ odcinków leżących na wyróżnionych bokach przypada przynajmniej jeden trójkąt. Łącznie otrzymujemy więc przynajmniej $2n$ trójkątów prostokątnych.

Przyjmijmy teraz, że nie istnieje ścieżka łącząca równoległe boki szachownicy. Nasz graf składa się z co najmniej $2n$ spójnych składowych i każda z nich zawiera wówczas przynajmniej jeden trójkąt prostokątny. A więc i w tym przypadku teza jest dowiedziona. Kończy to rozwiązanie zadania.

7. Na okręgu napisano skończenie wiele liczb ze zbioru $\{0, 1\}$. Łukiem długości $L \geq 0$ nazywamy ciąg L kolejnych liczb na okręgu. Dla danego łuku w niech $Z(w)$ i $N(w)$ oznaczają odpowiednio liczbę zer i jedynek, które on zawiera. Wiadomo przy tym, że dla dowolnych dwóch łuków w i w' tej samej długości zachodzi nierówność $|Z(w) - Z(w')| \leq 1$. Załóżmy, że dla pewnych łuków $w_1, w_2, \dots, w_k$ liczby

$$Z = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Z(w_j) \text{ oraz } N = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k N(w_j)$$

są całkowite. Udowodnić, że istnieje łuk w , dla którego $Z(w) = Z$ i $N(w) = N$.

Rozwiązanie:

W rozwiązywaniu zadania będziemy rozważać łuki o dowolnej długości całkowitej dodatniej — łuk może przebiegać cały okrąg wiele razy, jeżeli jego długość przekracza liczbę wszystkich punktów. Dla danej liczby całkowitej $\ell \geq 1$, niech Z_ℓ oznacza minimalną możliwą liczbę zer, która znajduje się na łuku długości ℓ . Analogicznie definiujemy liczbę N_ℓ dla jedynek. Wykażemy, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność

$$Z_a > \frac{a}{b} Z_b - 1.$$

Istotnie, rozważmy taki łuk o długości ab , że pierwsze a liczb, które zawiera tworzy łuk p_1 taki, że $Z(p_1) = Z_a$. Pozostałe $ab - a$ liczby podzielmy następnie na $b - 1$ kolejnych łuków $p_2, p_3, \dots, p_b$ o długości a . Cały łuk o długości ab podzielmy jednocześnie na a łuków $q_1, q_2, \dots, q_a$ o długości b . Licząc liczbę zer na całym łuku dwoma sposobami otrzymujemy zależność

$$Z(p_1) + Z(p_2) + \dots + Z(p_b) = Z(q_1) + Z(q_2) + \dots + Z(q_a).$$

Oczywiście

$$Z(q_1) + Z(q_2) + \dots + Z(q_a) \geq aZ_b,$$

gdyż na każdym łuku q_i znajduje się co najmniej Z_b zer. Uzasadnimy teraz nierówność

$$Z(p_1) + Z(p_2) + \dots + Z(p_b) \leq (Z_a + 1)(b - 1) + Z_a.$$

Rzeczywiście, z założeń zadania wynika, że na łukach tej samej długości liczby zer nie różnią się o więcej niż 1. Na każdym z łuków p_i , dla $2 \leq i \leq b$, liczba zer nie przekracza więc $Z(p_1) + 1 = Z_a + 1$. Na łuku p_1 liczba zer jest z kolei równa Z_a . Łącząc powyższe oszacowania dostajemy, że

$$aZ_b \leq (Z_a + 1)(b - 1) + Z_a = (Z_a + 1)b - 1 < (Z_a + 1)b,$$

co dowodzi żądanej nierówności.

Niech $L = Z + N$. Załóżmy najpierw, że $Z_L \geq Z + 1$. Oznaczmy przez $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ odpowiednio długości łuków $w_1, w_2, \dots, w_k$, o których mowa w treści zadania. Wówczas oczywiście $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_k = k(Z + N) = kL$. Mamy więc

$$kZ = \sum_{j=1}^k Z(w_j) > \sum_{j=1}^k \left(\frac{\ell_j}{L} Z_L - 1 \right) \geq \sum_{j=1}^k \left(\frac{\ell_j}{L} (Z + 1) - 1 \right) = kZ + k - k = kZ.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że $Z_L \leq Z$. W analogiczny sposób możemy wykazać, iż prawdziwa jest nierówność $N_L \leq N$.

Jeżeli $Z_L = Z$, to łuk p długości L , dla którego mamy $Z(p) = Z_L = Z$ jest oczywiście łukiem spełniającym warunki zadania. Załóżmy więc, że $Z_L \leq Z - 1$. Ponownie niech p będzie łukiem długości L , dla którego $Z(p) = Z_L$. Wówczas $N(p) = L - Z_L \geq L - (Z - 1) = N + 1$. Wiemy jednocześnie, że skoro $N_L \leq N$, to istnieje łuk q długości L , dla którego $N(q) = N$, gdyż liczba jedynek na łukach o tej samej długości nie różni się o więcej niż 1. W tym wypadku łuk q spełnia żądane warunki. Kończąc to rozwiązanie zadania.

8. *Kostką* nazywamy sześcián, który na każdej swojej ścianie ma wpisaną jedną liczbę całkowitą dodatnią. *Kostką zwykłą* nazywamy sześcián, na którego ścianach wpisano liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wyznaczyć wszystkie ciągi kostek $(K_1, K_2, \dots, K_{2014})$ o następującej własności: dla dowolnej liczby naturalnej n prawdopodobieństwo uzyskania liczby n jako sumy wyników rzutów kostkami $K_1, K_2, \dots, K_{2014}$ jest równe prawdopodobieństwu uzyskania liczby n jako sumy wyników rzutów 2014 zwykłymi kostkami.

Rozwiązanie:

Założmy, że w kostkę K_i wpisano liczby całkowite dodatnie $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$, gdzie $1 \leq i \leq 2014$. Ciąg kostek $(K_1, K_2, \dots, K_{2014})$ spełnia żądany warunek wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej n równanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2014} = n,$$

gdzie dla $1 \leq i \leq 2014$ liczba x_i jest jedną z liczb $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$, posiada tą samą liczbę rozwiązań co równanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2014} = n,$$

gdzie $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq i \leq 2014$ niech $P_i(x)$ będzie wielomianem zdefiniowanym jako

$$P_i(x) = x^{a_i-1} + x^{b_i-1} + x^{c_i-1} + x^{d_i-1} + x^{e_i-1} + x^{f_i-1}.$$

Zauważmy, że dany ciąg kostek spełnia żądany warunek wtedy i tylko wtedy zachodzi równość wielomianów

$$P_1(x)P_2(x) \dots P_{2014}(x) = (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^{2014}.$$

Istotnie, po otworzeniu nawiasów powyższa równość sprowadza się do równości współczynników przy dowolnym jednomianie x^n , co z kolei, jak łatwo zauważyć, sprowadza się do poprzedniego warunku. Zredukowaliśmy w ten sposób rozwiązanie zadania do wyznaczenia wszystkich ciągów wielomianów $(P_1(x), P_2(x), \dots, P_{2014}(x))$ o współczynnikach całkowitych nieujemnych sumujących się do sześciu, które spełniają równość

$$\begin{aligned} P_1(x)P_2(x) \dots P_{2014}(x) &= (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^{2014} \\ &= (x+1)^{2014}(x^2+x+1)^{2014}(x^2-x+1)^{2014}. \end{aligned}$$

Niech $Q_1(x) = x+1$, $Q_2(x) = x^2+x+1$, $Q_3(x) = x^2-x+1$ i ustalmy $1 \leq i \leq 2014$. Ponieważ wszystkie rozważane wielomiany są unormowane, mają współczynniki całkowite oraz wielomiany $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ są nierozkładalne, zachodzi równość

$$P_i(x) = Q_1(x)^a Q_2(x)^b Q_3(x)^c,$$

dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c . Udowodnimy, że $a = b = 1$ oraz $c \in \{0, 1, 2\}$.

Istotnie, suma współczynników dowolnego wielomianu jest równa jego wartości w punkcie 1. Skoro $Q_1(1) = 2$, $Q_2(1) = 3$, $Q_3(1) = 1$ oraz $P_i(1) = 6$, to jasne jest, że musi być spełniona równość $a = b = 1$. Co więcej, nietrudno zauważyć, że współczynnik przy jednomianie x w wielomianie $Q_3(x)$ równy

jest $-c$. W wielomianie $Q_1(x)Q_2(x)$ współczynnik przy x jest równy 2, a więc w wielomianie $Q_1(x)Q_2(x)Q_3(x)$ wynosi on $2 - c$. Nierówność $c \leq 2$ jest więc konsekwencją faktu, że współczynniki wielomianu $P_i(x)$ są nieujemne.

Udowodniliśmy w ten sposób, iż każdy z wielomianów $P_i(x)$ jest jednym z wielomianów: $Q_1(x)Q_2(x)$, $Q_1(x)Q_2(x)Q_3(x)$, $Q_1(x)Q_2(x)Q_3^2(x)$. Ponieważ łącznie w iloczynie wielomianów $P_i(x)$ każdy z wielomianów $Q_i(x)$ występuje tyle samo razy, liczba tych wielomianów $P_i(x)$, które są równe $Q_1(x)Q_2(x)$ jest taka sama jak liczba wielomianów równych $Q_1(x)Q_2(x)Q_3^2(x)$. Otrzymaliśmy zatem, że warunki zadania są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej liczby całkowitej $0 \leq k \leq 1007$:

- dokładnie $2k$ spośród wielomianów $P_i(x)$ jest równych wielomianowi $Q_1(x)Q_2(x)Q_3(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,
- dokładnie $1007 - k$ spośród wielomianów $P_i(x)$ jest równych wielomianowi $Q_1(x)Q_2(x) = x^3 + x^2 + x + 1$,
- pozostałe $1007 - k$ spośród wielomianów $P_i(x)$ jest równych wielomianowi $Q_1(x)Q_2(x)Q_3(x)^2 = x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

Aby przetłumaczyć z powrotem język wielomianów na język kostek wystarczy zauważyć, że po dodaniu 1 do potęg odpowiednich wielomianu otrzymamy liczby wpisane na kostkach. W ten sposób możemy sformułować odpowiedź — ciąg kostek $(K_1, K_2, \dots, K_{2014})$ spełnia żądany warunek wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej liczby całkowitej $0 \leq k \leq 1007$:

- $2k$ spośród kostek K_i jest kostką zwykłą
- $1007 - k$ spośród kostek K_i posiada wpisane liczby 1, 2, 2, 3, 3, 4 na swoich ścianach
- pozostałe $1007 - k$ kostek K_i posiada wpisane liczby 1, 3, 4, 5, 6, 8 na swoich ścianach.

Kończy to rozwiązanie zadania.

9. Dwa okręgi ω_1, ω_2 o promieniu 1 przecinają się w punktach X i Y , przy czym $XY = 1$. Punkt C leży na okręgu ω_1 . Styczne CA i CB do okręgu ω_2 przecinają ω_1 odpowiednio w punktach B' i A' . Proste AA' i BB' przecinają się w punkcie Z . Wyznaczyć $\angle XZY$.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący lemat.

Lemat. Dany jest trójkąt ABC . Niech O będzie środkiem okręgu opisanego, zaś R promieniem tego okręgu. Niech J będzie środkiem okręgu dopisanego do

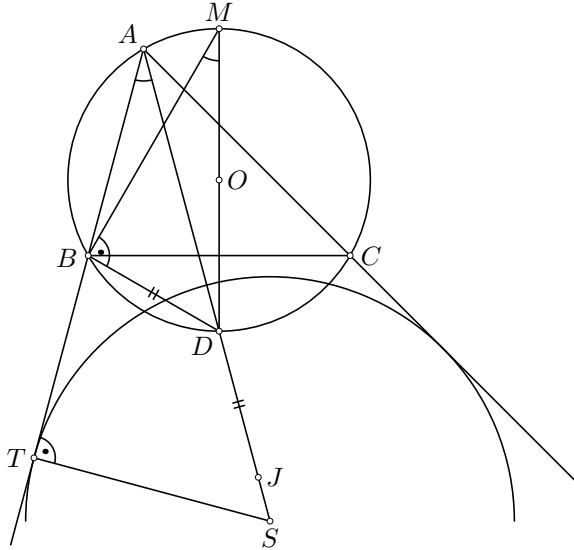
trójkąta ABC , stycznego do boku BC . Niech ponadto S będzie środkiem okręgu ω o promieniu r i środku na półprostej $AJ^{\rightarrow}$ poza okręgiem opisanym na trójkącie ABC , stycznego do prostych AB i AC . Wówczas

- $OS^2 < R^2 + 2Rr$, gdy S leży na odcinku AJ ,
- $OS^2 = R^2 + 2Rr$, gdy $S = J$,
- $OS^2 > R^2 + 2Rr$, gdy S leży na półprostej $AJ^{\rightarrow}$ poza odcinkiem AJ .

Dowód lematu. Przyjmijmy, że dwusieczna AJ przecina okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie w punkcie D , zaś M niech będzie środkiem łuku BC zawierającego punkt A . Niech ponadto T będzie punktem styczności okręgu ω do prostej AB . Odcinek MD jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC , więc $\angle MBD = 90^\circ$. Ponadto mamy $\angle TAS = \angle BAD = \angle BMD$. Trójkąty ATS i MBD są więc podobne, skąd $\frac{MD}{BD} = \frac{SA}{TS}$. Ponieważ $BD = DJ$, więc

$$2R \cdot r = MD \cdot TS = BD \cdot SA = DJ \cdot SA.$$

Z potęgi punktu S względem okręgu opisanego dostajemy $SD \cdot SA = OS^2 - R^2$.



Jeśli teraz punkt S leży na odcinku AJ (poza okręgiem opisanym, czyli na odcinku DJ), to mamy $DS < DJ$. W takim razie

$$OS^2 = R^2 + SD \cdot SA < R^2 + DJ \cdot SA = R^2 + 2Rr.$$

Jeśli $S = J$, to $DS = DJ$, więc

$$OS^2 = R^2 + SD \cdot SA = R^2 + DJ \cdot SA = R^2 + 2Rr.$$

Jeśli natomiast punkt S leży na półprostej $AJ^{\rightarrow}$ poza odcinkiem AJ , to $DS > DJ$, skąd

$$OS^2 = R^2 + SD \cdot SA > R^2 + DJ \cdot SA = R^2 + 2Rr.$$

To kończy dowód lematu.

Z warunków zadania o równości promieni okręgów i długości ich wspólnej cięciwy wnioskujemy, że odległość między środkami ω_1 i ω_2 wynosi $\sqrt{3}$. Z powyższego lematu wynika teraz, że okrąg ω_2 jest okręgiem dopisanym do trójkąta $A'B'C$.

Wykażemy, że punkt Z leży na okręgu ω_1 . Oznaczmy przez O_1 i O_2 środki okręgów odpowiednio ω_1 i ω_2 , zaś przez C' punkt styczności odcinka $A'B'$ z okręgiem ω_2 . Zachodzą równości

$$\begin{aligned} \angle AO_2A' &= \angle AO_2C' + \angle A'O_2C' = \angle AO_2C' + \frac{1}{2}\angle BO_2C' = \\ &= 180^\circ - \angle AB'C' + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BA'C') = \angle A'B'C + \frac{1}{2}\angle B'A'C \end{aligned}$$

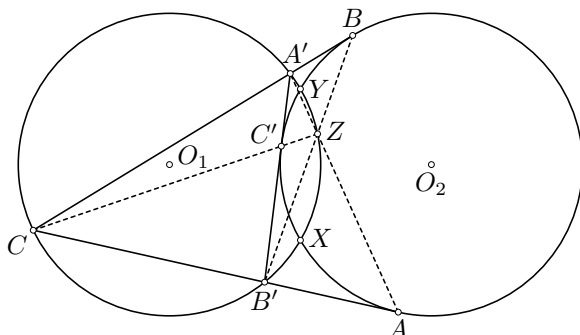
oraz

$$\begin{aligned} \angle O_1A'O_2 &= \angle O_1A'B' + \angle B'A'O_2 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B'O_1A') + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B'A'C) = \\ &= 90^\circ - \angle A'CB' + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B'A'C = \angle A'B'C + \angle B'A'C - \frac{1}{2}\angle B'A'C = \\ &= \angle A'B'C + \frac{1}{2}\angle B'A'C, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $\angle AO_2A' = \angle O_1A'O_2$. Ponieważ $O_2A = O_1A'$, więc czworokąt $AO_2A'O_1$ jest trapezem równoramiennym, skąd otrzymujemy równość $\angle O_2AA' = \angle A'O_1O_2$. Analogicznie uzasadnimy, że $\angle O_2BB' = \angle B'O_1O_2$. W takim razie

$$\begin{aligned} \angle A'ZB' &= \angle AZB = 360^\circ - \angle A'AO_2 - \angle B'BO_2 - \angle AO_2B = \\ &= 360^\circ - \angle A'O_1O_2 - \angle B'O_1O_2 - \angle AO_2B = 360^\circ - \angle A'O_1B' - \angle AO_2B = \\ &= 360^\circ - 2\angle A'CB' - 180^\circ + \angle A'CB' = 180^\circ - \angle A'CB', \end{aligned}$$

czyli punkt Z leży na okręgu ω_1 .



Skoro $O_1X = O_1Y = XY$, to $\angle XO_1Y = 60^\circ$, skąd wniosek, że kąt wpisany oparty na łuku XY zawierającym punkt Z ma miarę 30° . W takim razie dostajemy $\angle XZY = 150^\circ$.

10. Punkt X leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym

$$XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB.$$

Niech I_1, I_2, I_3 będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio XBC, XCA i XAB . Wykazać, że proste AI_1, BI_2 i CI_3 przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez t wspólną wartość danych w treści zadania iloczynów. Stosując twierdzenie Desarguesa dla trójkątów ABC i $I_1I_2I_3$ wnosimy, że wystarczy dowieść, że punkty $K = BC \cap I_2I_3, L = CA \cap I_3I_1, M = AB \cap I_1I_2$ (być może znajdujące się w nieskończoności) leżą na jednej prostej.

Założmy najpierw, że każda z rozważanych w poprzednim zdaniu par prostych ma punkt wspólny. Z treści zadania wynika, że $\frac{AX}{AC} = \frac{BX}{BC}$, więc na mocy twierdzenia o dwusiecznej dwusieczne AI_2 i BI_1 w trójkątach ACX i BCX przecinają się w punkcie P leżącym na boku CX . Przyjmijmy, że proste CI_2 i XI_2 przecinają boki AX i AC odpowiednio w punktach D i E . Stosując twierdzenia Van Aubela i o dwusiecznej dostajemy

$$\frac{AI_2}{PI_2} = \frac{AD}{XD} + \frac{AE}{CE} = \frac{AC}{CX} + \frac{AX}{CX} = \frac{AC + AX}{CX}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\frac{BI_1}{PI_1} = \frac{BC + BX}{CX}.$$

Twierdzenie Menelausa dla trójkąta ABP i prostej I_1I_2 zawierającej punkt M pozwala napisać

$$\frac{AI_2}{PI_2} \cdot \frac{PI_1}{BI_1} \cdot \frac{BM}{AM} = 1,$$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AC + AX}{BC + BX} = \frac{AC + t/BC}{BC + t/AC} = \frac{(AC \cdot BC + t)AC}{(AC \cdot BC + t)BC} = \frac{AC}{BC}.$$
$$\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} \quad \text{oraz} \quad \frac{CL}{AL} = \frac{BC}{AB}.$$
$$\frac{AI_2}{PI_2} = \frac{AC + AX}{CX} \quad \text{oraz} \quad \frac{BI_1}{PI_1} = \frac{BC + BX}{CX}.$$
$$1 = \frac{AI_2}{PI_2} \cdot \frac{PI_1}{BI_1} = \frac{AC + AX}{BC + BX} = \frac{AC + t/BC}{BC + t/AC} = \frac{(AC \cdot BC + t)AC}{(AC \cdot BC + t)BC} = \frac{AC}{BC},$$

11. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt F leżący na odcinku CD . Punkty O_1, O_2 i O_3 są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABF, BCF i ADF . Dowieść, że ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$ leży na prostej AB .

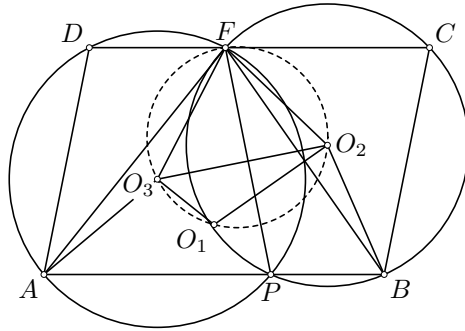
Założmy, że okrąg opisany na trójkącie ADF przecina prostą AB ponownie w punkcie P . Mamy

60

skąd wniosek, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie BCF . W takim razie prosta O_2O_3 jest symetralną odcinka PF . Ponadto mamy

$$\begin{aligned}\angle(FO_3, O_3O_1) &= \frac{1}{2}\angle(FO_3, O_3A) = \angle(FP, PA) = \\ &= \angle(FC, BC) = \frac{1}{2}\angle(FO_2, BO_2) = \angle(FO_2, O_2O_1),\end{aligned}$$

więc punkty F, O_3, O_1, O_2 leżą na okręgu. Punkty A, P, B są odbiciami symetrycznymi punktu F odpowiednio względem prostych O_1O_3, O_2O_3, O_1O_2 , a więc leżą na prostej Steinera punktu F względem trójkąta $O_1O_2O_3$. Na prostej tej leży również ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$, co kończy rozwiązanie.



Drugi Mecz Matematyczny

1. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zadany poprzez warunki: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ oraz $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n \geq 2$. Udowodnić, że jeżeli k jest liczbą naturalną, która dzieli pewien wyraz ciągu (a_n) , to k nie daje reszty 5 z dzielenia przez 8.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujące znane fakty dotyczące reszt kwadratowych: liczba 2 jest resztą kwadratową modulo p , gdzie $p > 2$ jest liczbą pierwszą, wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 1 \pmod{8}$ lub $p \equiv 7 \pmod{8}$. Podobnie liczba -2 jest resztą kwadratową modulo p , wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 1 \pmod{8}$ lub $p \equiv 3 \pmod{8}$. Rozważmy ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ zadany jako $b_n = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ dla $n \geq 1$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = (2a_{n+1} + a_n)a_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1}(2a_n - a_{n+1}) + a_n^2 = \\ &= -a_{n+1}a_{n-1} + a_n^2 = -b_n. \end{aligned}$$

W szczególności, skoro $b_1 = -2$, to $b_n = (-1)^n \cdot 2$ dla dowolnego $n \geq 1$. Rozważmy teraz liczbę całkowitą k taką, że $k \mid a_{n+1}$ dla pewnego $n \geq 0$ i niech p będzie jej dowolnym dzielnikiem pierwszym. Oczywiście k jest liczbą nieparzystą, a zatem $p > 2$. Z równości

$$a_{n+1}a_{n-1} = (-1)^n \cdot 2 + a_n^2$$

wynika, że liczba $(-1)^{n+1} \cdot 2$ jest resztą kwadratową modulo p . Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to w szczególności 2 jest resztą kwadratową modulo p oraz $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$. Ponieważ jest to prawda dla dowolnego dzielnika pierwszego k , a liczba k jest iloczynem swoich czynników pierwszych, mamy w efekcie $k \equiv \pm 1 \pmod{8}$. Analogicznie, jeżeli n jest liczbą parzystą to $p \equiv 1 \pmod{8}$ lub $p \equiv 3 \pmod{8}$. Pozostaje zauważyć, że i w tym wypadku, mnożąc reszty 1 i 3 modulo 8 otrzymamy w wyniku jedną z tych dwóch reszt. W takim razie $k \equiv 1 \pmod{8}$ lub $k \equiv 3 \pmod{8}$. W obu przypadkach k nie daje reszty 5 z dzielenia przez 8 i dowód jest zakończony.

2. Dany jest niestały wielomian P o współczynnikach całkowitych i dodatnim współczynniku wiodącym. Wykazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia m , dla której liczba $P(m!)$ jest złożona.

Rozwiązanie:

Zapiszmy wielomian P w postaci $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ i rozważmy wielomian Q o odwróconych współczynnikach, czyli $Q(x) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} x^i$. Ustalmy liczbę pierwszą p oraz liczbę parzystą $k < p$. Z twierdzenia Wilsona wynikają przystawania

$$1 \equiv -(p-1)! \equiv -(p-k)!(p-k+1) \dots (p-1) \equiv (-1)^k (p-k)!(k-1)! \equiv$$

$$\equiv (p-k)!(k-1)! \pmod{p}.$$

Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} ((k-1)!)^n P((p-k)!) &= \sum_{i=0}^n a_i ((k-1)!)^{n-i} ((p-k)!(k-1)!)^i \equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^n a_i ((k-1)!)^{n-i} = Q((k-1)!) \pmod{p}. \end{aligned}$$

W szczególności, skoro p nie dzieli $(k-1)!$ (bo $p > k$), to jeżeli zachodzi podzielność $p \mid Q((k-1)!)$ to również $p \mid P((p-k)!)$. Wykażemy teraz, że dla odpowiednio dużych k , liczba $Q((k-1)!)$ posiada dzielnik pierwszy, który jest rzeczywiście większy niż k . Istotnie, przypomnijmy, że na mocy danego założenia współczynnik wiodący a_n wielomianu P , który jest jednocześnie wyrazem wolnym wielomianu Q , jest dodatni. Jeżeli weźmiemy więc liczbę parzystą $k > 2a_n + 1$, to liczba $s = \frac{(k-1)!}{a_n}$ jest całkowita i podzielna przez wszystkie liczby pierwsze mniejsze niż k . Wyciągając więc a_n przed nawias z wyrażenia $Q((k-1)!)$ otrzymujemy przedstawienie postaci $Q((k-1)!) = a_n b$, gdzie mamy $b \equiv 1 \pmod{s}$. Oczywiście dla odpowiednio dużych k zachodzi nierówność $|b| > 1$. Wówczas dowolny dzielnik pierwszy p liczby b jest większy od k . Na mocy wcześniejszych rozważań dla tak wybranej liczby p zachodzi więc podzielność $p \mid P((p-k)!)$.

Pozostało nam stwierdzić, że możemy wybrać dowolnie duże k tak, aby zachodziła nierówność $P((p-k)!) > p$. Będzie to oznaczać, że dla $m = p-k$ liczba $P(m!)$ jest złożona i zadanie zostanie rozwiązane. Rozważmy w tym celu $k = (q-1)!$ dla pewnej odpowiednio dużej liczby pierwszej q . Zauważmy, że $i \mid k+i$ dla $i = 2, \dots, q-1$ oraz z twierdzenia Wilsona $q \mid k+1$. W szczególności wszystkie liczby $k+1, k+2, \dots, k+q-1$ są złożone. Zachodzi zatem równość $p = k+q+r$ dla pewnej liczby całkowitej $r \geq 0$. Skoro $a_n > 0$, to jeżeli tylko P nie jest wielomianem liniowym postaci $P(x) = x + a_0$, gdzie a_0 jest liczbą całkowitą ujemną, to dla odpowiednio dużych x zachodzi nierówność $P(x) \geq x$. Ponadto, dla dowolnych liczb całkowitych $a, b > 2$ mamy nierówność $ab > a+b$, gdyż można ją równoważnie przedstawić w postaci $(a-1)(b-1) > 1$. Dla odpowiednio dużego q mamy więc

$$\begin{aligned} P((p-k)!) &= P((q+r)!) \geq (q+r)! > (q-1)! + q(q+1) \dots (q+r) \geq \\ &\geq (q-1)! + q + r = p. \end{aligned}$$

Pozostał nam zatem do rozpatrzenia przypadek, w którym $P(x)$ jest wielomianem liniowym postaci $P(x) = x + a_0$ dla $a_0 < 0$. Jeżeli $a_0 < -1$ to wystarczy wziąć $m = -a_0$ i wówczas liczba $P(m!)$ jest złożona. Dla $a_0 = -1$ wystarczy zaś przyjąć $m = 5$. Kończy to rozwiązanie zadania.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba całkowita dodatnia k , dla której liczba $p = 6k + 1$ jest pierwsza i spełniona jest kongruencja

$$\binom{3k}{k} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że nie istnieje liczba całkowita dodatnia k o żądanej własności. Liczba $k = 1$ nie spełnia danego warunku. Dla dowodu nie wprost założymy, że istnieje liczba całkowita $k > 1$ o żądanej własności. Wówczas

$$\binom{3k}{0} \equiv \binom{3k}{k} \equiv \binom{3k}{2k} \equiv \binom{3k}{3k} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Niech g będzie pierwiastkiem pierwotnym (generatorem) modulo p , czyli taką resztą, że jeżeli $n \in \mathbb{N}$ oraz $g^n \equiv 1 \pmod{p}$, to $p - 1 \mid n$. Równoważnie, liczby $g^0, g^1, \dots, g^{p-2}$ dają wszystkie możliwe niezerowe reszty modulo p .

Niech $x = g^6$. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona dla dowolnego $0 \leq i \leq k - 1$ otrzymujemy

$$(1 + x^i)^{3k} = \sum_{j=0}^{3k} \binom{3k}{j} x^{ij}.$$

A zatem

$$(1 + x^0)^{3k} + (1 + x^1)^{3k} + \dots + (1 + x^{k-1})^{3k} = \sum_{j=0}^{3k} \binom{3k}{j} \sum_{i=0}^{k-1} x^{ij}.$$

Ustalmy liczbę $0 \leq j \leq 3k$ taką, że $j \notin \{0, k, 2k, 3k\}$. Zauważmy, że wówczas

$$\sum_{i=0}^{k-1} x^{ij} = \frac{x^{kj} - 1}{x^j - 1}.$$

Liczba p dzieli licznik tego ułamka, bo $x^{kj} - 1 = g^{6kj} - 1 = g^{(p-1)j} - 1$, a ta liczba jest podzielna przez p na mocy małego twierdzenia Fermata. Jednocześnie mianownik nie jest podzielny przez p , gdyż $x^j - 1 = g^{6j} - 1$, a skoro i nie dzieli się przez k to $6i$ nie dzieli się przez $6k = p - 1$. A zatem $\sum_{i=0}^{k-1} x^{ij} \equiv 0 \pmod{p}$.

Ustalmy teraz $j \in \{0, k, 2k, 3k\}$. Wówczas dla dowolnego $0 \leq i \leq k - 1$ mamy $x^{ij} \equiv g^{6j} \equiv 1 \pmod{p}$, gdyż $k \mid j$. Zatem $\sum_{i=0}^{k-1} x^{ij} \equiv k \pmod{p}$.

Tym samym

$$(1 + x^0)^{3k} + (1 + x^1)^{3k} + \dots + (1 + x^{k-1})^{3k} = \sum_{j=0}^{3k} \binom{3k}{j} \sum_{i=0}^{k-1} x^{ij} \equiv$$

$$\equiv k \left(\binom{3k}{0} + \binom{3k}{k} + \binom{3k}{2k} + \binom{3k}{3k} \right) \equiv 4k \pmod{p}.$$

Zauważmy jednak, że z małego twierdzenia Fermata dla dowolnego $0 \leq i \leq k-1$ jeżeli $1 + x^i \not\equiv 0 \pmod{p}$, to prawdziwa jest kongruencja

$$(1 + x^i)^{6k} \equiv (1 + x^i)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

a zatem

$$((1 + x^i)^{3k} - 1)((1 + x^i)^{3k} + 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

skąd $(1 + x^i)^{3k} \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Zatem dla dowolnego $0 \leq i \leq k-1$ reszta z dzielenia przez p liczby $(1 + x^i)^{3k}$ należy do zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Wartość bezwzględna z sumy reszt z dzielenia przez p liczb $(1 + x^i)^{3k}$ dla $0 \leq i \leq k-1$ nie przekracza więc k . Kongruencja

$$(1 + x^0)^{3k} + (1 + x^1)^{3k} + \dots + (1 + x^{k-1})^{3k} \equiv 4k \pmod{p},$$

proceedzi zatem do sprzeczności, gdyż reszta z dzielenia lewej strony należy do zbioru $\{0, 1, 2, \dots, k\} \cup \{5k, 5k+1, \dots, 6k\}$, gdzie nie należy liczba $4k$. Kończy to rozwiązanie zadania.

4. Dla danej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć wartość sumy

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

Wykorzystamy w tym celu **wzór interpolacyjny Lagrange'a** dla wielomianu $f(x) = x^n$ w punktach $0, 1, 2, \dots, n$. Wynika z niego równość wielomianów

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^n \frac{x(x-1)\dots(x-k-1)(x-k+1)\dots(x-n)}{(n-k)!k!}.$$

Aby wyznaczyć szukaną sumę porównamy współczynniki przy x^n i x^{n-1} w wielomianach występujących po obu stronach równości. Porównując współczynnik przy x^n dostajemy zależność

$$1 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{k^n}{(n-k)!k!},$$

skąd również

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^n \binom{n}{k}.$$

Po porównaniu współczynników przy x^{n-1} i pomnożeniu obu stron równości przez $n!$ otrzymujemy z kolei

$$0 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^n \binom{n}{k} ((1+2+\dots+n)-k).$$

Jednakże

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^n \binom{n}{k} ((1+2+\dots+n)-k) = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^n \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^{n+1} \binom{n}{k} = \\ &= \frac{n(n+1)!}{2} - \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^{n+1} \binom{n}{k}, \end{aligned}$$

skąd wynika żądana równość. Kończy to rozwiązanie zadania.

5. Dana jest funkcja $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, która dla dowolnych liczb dodatnich x, y spełnia warunki

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x+y) \leq 2 \max\{f(x), f(y)\}.$$

Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $f(x) + f(y) \geq f(x+y)$.

Rozwiązanie:

Za pomocą indukcji udowodnimy na początku, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność $f(n) \leq 2n$. Biorąc $x = y = 1$ w danym równaniu otrzymujemy, że $f(1) = 1 \leq 2$. Z drugiego warunku wynika zatem nierówność $f(2) \leq 2$. Korzystając ponownie z pierwszego otrzymujemy $f(2^m) \leq 2^m$ dla dowolnej liczby naturalnej m . Załóżmy teraz, że $n > 1$ i dowodzona nierówność zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej mniejszej niż n . Rozważmy liczbę naturalną m taką, że $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Jeżeli $n = 2^m$, to teza wynika z poprzedniego fragmentu rozumowania. Załóżmy więc, że $0 < n - 2^m < 2^m < n$. Wówczas

$$f(n) = f(2^m + (n - 2^m)) \leq 2 \max\{f(2^m), f(n - 2^m)\}.$$

Wiemy już jednak, że $f(2^m) \leq 2^m < n$, a z założenia indukcyjnego dostajemy $f(n - 2^m) \leq 2(n - 2^m) < n$. Kończy to dowód indukcyjny.

W dalszej części rozwiązania przyjmijmy dla dowodu nie wprost, że istnieją liczby dodatnie x, y , dla których zachodzi $f(x+y) = a(f(x)+f(y))$ dla pewnej liczby rzeczywistej $a > 1$. Podnosząc obie strony tej równości do potęgi $N \geq 1$ otrzymujemy

$$f(x+y)^N = a^N \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} f(x)^k f(y)^{N-k} \right).$$

Z poprzedniego fragmentu dowodu wynika, że dla dowolnego $0 \leq k \leq N$ zachodzi nierówność

$$\binom{N}{k} f(x)^k f(y)^{N-k} \geq \frac{1}{2} f \left(\binom{N}{k} \right) f(x)^k f(y)^{N-k} = \frac{1}{2} f \left(\binom{N}{k} x^k y^{N-k} \right).$$

Na mocy drugiego z warunków danych w treści zadania prawdziwa jest nierówność $f(x) + f(y) \geq \frac{1}{2} f(x+y)$. Wykorzystując tę zależność wielokrotnie uzyskujemy nierówność postaci

$$\sum_{k=0}^N f \left(\binom{N}{k} x^k y^{N-k} \right) \geq \frac{1}{2^\ell} f \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k y^{N-k} \right),$$

gdzie $\ell = \lceil \log_2 N \rceil$. Istotnie, w pierwszym kroku możemy sparować $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ wyrażeń postaci $f \left(\binom{N}{k_1} x^{k_1} y^{N-k_1} \right), f \left(\binom{N}{k_2} x^{k_2} y^{N-k_2} \right)$ szacując

$$\begin{aligned} & f \left(\binom{N}{k_1} x^{k_1} y^{N-k_1} \right) + f \left(\binom{N}{k_2} x^{k_2} y^{N-k_2} \right) \geq \\ & \geq \frac{1}{2} f \left(\binom{N}{k_1} x^{k_1} y^{N-k_1} + \binom{N}{k_2} x^{k_2} y^{N-k_2} \right). \end{aligned}$$

Powtarzając tego typu operację co najwyżej ℓ razy, parując za każdym razem tyle wyrazów ile jest to możliwe, otrzymujemy żadaną nierówność.

Pozostaje zauważyć, że po połączeniu poprzednich szacowań mamy wówczas

$$\begin{aligned} f((x+y)^N) &= f(x+y)^N = a^N \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} f(x)^k f(y)^{N-k} \right) \geq \\ &\geq \frac{a^N}{2^{\ell+1}} f \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k y^{N-k} \right) = \frac{a^N}{2^{\ell+1}} f((x+y)^N), \end{aligned}$$

skąd $2^{\ell+1} \geq a^N$. Jednocześnie, skoro $\ell = \lceil \log_2 N \rceil$, to $2^{\ell+1} \leq 4N$. Nierówność $4N \geq a^N$ nie zachodzi jednak dla odpowiednio dużych N , gdyż $a > 1$ i funkcja liniowa rośnie wolniej niż funkcja wykładnicza. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. W każde pole prostokąta o wymiarach $r \times s$, gdzie $1 \leq r, s \leq n$, wpisano pewną liczbę ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Prostokąt nazywamy *łacińskim*, jeżeli w żadnym wierszu i w żadnej kolumnie nie ma dwóch takich samych liczb. Udowodnić, że prostokąt łaciński $r \times s$ można uzupełnić do kwadratu łacińskiego $n \times n$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda z liczb $1, 2, \dots, n$ występuje w nim co najmniej $r + s - n$ razy.

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania zaczniemy od udowodnienia lematu dotyczącego grafów dwudzielnych. Przypomnijmy, że *stopień* wierzchołka w grafie, to liczba zawierających go krawędzi, zaś *skojarzeniem* w grafie nazywamy dowolny podzbiór rozłącznych krawędzi.

Lemat. *W dowolnym grafie dwudzielnym, który zawiera przynajmniej jedną krawędź, istnieje skojarzenie zawierające wszystkie wierzchołki o maksymalnym stopniu.*

Dowód lematu. Niech d oznacza maksymalny możliwy stopień wierzchołka w danym grafie dwudzielnym o grupach wierzchołków A i B . Podzbiory wierzchołków o stopniu d zawarte w A i B oznaczmy odpowiednio przez A_1 i B_1 . Naszym celem jest znalezienie skojarzenia, które zawiera każdy wierzchołek ze zbiorów A_1 i B_1 . Wykażemy najpierw, że istnieje skojarzenie, które zawiera każdy wierzchołek z A_1 . Wykorzystamy w tym celu twierdzenie Halla. Rozważmy graf dwudzielny, będący podgrafem wyjściowego, o grupach wierzchołków A_1 i B . Załóżmy, że warunek Halla nie jest spełniony, czyli, że istnieje pewien podzbiór $C \subseteq A_1$ o mocy $k > 0$ taki, że zbiór wierzchołków $C' \subseteq B$, które połączone są krawędzią z pewnym wierzchołkiem z C ma co najwyżej $k - 1$ elementów. Z każdego wierzchołka C wychodzi dokładnie d krawędzi, a więc wszystkich krawędzi pomiędzy C i C' jest dokładnie dk . Z drugiej strony, z każdego wierzchołka z C' wychodzi co najwyżej d krawędzi, a więc wszystkich krawędzi jest co najwyżej $d|C'| \leq d(k - 1) < dk$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dla tak wybranego podgrafu spełniony jest warunek Halla. Istnieje więc skojarzenie zawierające A_1 . W identyczny sposób możemy udowodnić, że istnieje skojarzenie zawierające B_1 .

W dalszej części dowodu lematu będziemy już wyłącznie rozważać sumę mnogościową tych dwóch skojarzeń. Każdy jej wierzchołek posiada stopień 1 lub 2, przy czym stopień 2 mogą posiadać jedynie wierzchołki maksymalnego stopnia w wyjściowym grafie. Udowodnimy, że można usunąć pewne krawędzie w taki sposób, aby każdy wierzchołek z $A_1 \cup B_1$ posiadał stopień 1. Otrzymamy tym samym skojarzenie w całym grafie zawierające $A_1 \cup B_1$. Jeżeli pewna krawędź łączy wierzchołki z A_1 , B_1 to pokolorujemy ją na czerwono, zaś wszystkie pozostałe krawędzie pokolorujemy na czarno. Wybierzmy dowolny wierzchołek a_1 o stopniu 2, dla ustalenia uwagi niech $a_1 \in A_1$. Nie wychodzą z niego dwie krawędzie czarne, gdyż krawędź czarna może pochodzić jedynie ze skojarzenia

zawierającego A_1 . Jeżeli posiada krawędź czarną i krawędź czerwoną, to usuwamy krawędź czarną. Jeżeli posiada dwie krawędzie czerwone to oznaczmy przez $b_1, b_2 \in B_1$ jego sąsiadów. Ponieważ wierzchołki b_1 i b_2 zostały skojarzone, to jeden z nich sąsiaduje z pewnym wierzchołkiem $a_2 \neq a_1$ z A_1 . Załóżmy, że b_2 sąsiaduje z a_2 . Wówczas usuwamy krawędź łączącą a_1 z b_2 .

Zauważmy, że po takiej operacji wierzchołki z A_1 i B_1 nadal są skojarzone. Możemy zatem taką operację powtarzać wielokrotnie (w każdym kroku konstrukcji wykorzystując fakt, że wierzchołki są skojarzone). Po każdym kroku maleje liczba wierzchołków o stopniu 2. Ostatecznie dochodzimy więc do sytuacji, w której każdy wierzchołek z A_1 i B_1 posiada stopień 1. Kończy to dowód lematu.

Przechodzimy do głównej części rozwiązania. Zauważmy najpierw, że warunek dany w zadaniu jest warunkiem koniecznym. Istotnie, jeżeli pewna liczba i pojawia się w prostokącie $r \times s$ mniej niż $r + s - n$ razy, to po dołożeniu $n - r$ wierszy oraz $n - s$ kolumn liczba i będzie pojawiać się w kwadracie $n \times n$ mniej niż $r + s - n + (n - r) + (n - s) = n$ razy, czyli w szczególności taki kwadrat nie może być łaciński. Wystarczy zatem wykazać, że dany warunek jest wystarczający.

Dowodzimy, że jeżeli $r < n$, to prostokąt łaciński $r \times s$ może zostać rozszerzony do prostokąta $(r + 1) \times s$ łacińskiego w taki sposób, że dowolna liczba $i = 1, 2, \dots, n$ pojawia się co najmniej $r + s + 1 - n$ razy. W ten sam sposób będziemy mogli udowodnić analogiczną własność dla drugiego wymiaru tablicy. Ponieważ po takiej operacji warunek dany w zadaniu jest spełniony możemy ją powtarzać wielokrotnie aż uzyskamy ostatecznie kwadrat łaciński $n \times n$.

Udowodnijmy zatem zapowiedziane stwierdzenie. Rozważmy graf dwudzielny, którego jedną grupą wierzchołków stanowi s kolumn danej tablicy, a drugą grupę stanowią liczby od 1 do n . Kolumnę k łączymy krawędzią z liczbą i wtedy i tylko wtedy, gdy i nie znajduje się w k . Każda kolumna zawiera dokładnie r liczb, a zatem stopień dowolnej kolumny jest równy $n - r$. Dowolna liczba i występuje w co najmniej $r + s - n$ kolumnach, a zatem jej stopień nie przekracza $s - (r + s - n) = n - r$. Oznaczmy przez I zbiór tych liczb, których stopień jest równy dokładnie $n - r$. Jest to maksymalny możliwy stopień w rozważanym grafie dwudzielnym. Z udowodnionego przez nas lematu wynika zatem istnienie skojarzenia, które zawiera wszystkie kolumny oraz wszystkie liczby zbioru I . Dopiszmy teraz do każdej kolumny liczbę, która jej odpowiada w tym skojarzeniu. Dopisujemy w ten sposób do danej tablicy s różnych liczb tak, że każdej kolumnie przypisaliśmy liczbę, która do niej wcześniej nie należała. Otrzymany prostokąt ma więc wymiary $(r + 1) \times s$ i jest prostokątem łacińskim. Co więcej, elementy zbioru I występują teraz na tablicy co najmniej $r + s + 1 - n$ razy, gdyż każdy z nich został dopisany do pewnej kolumny. Każda pozostała liczba występowała już wcześniej co najmniej $r + s + 1 - n$ razy, a zatem udowodniliśmy nasze stwierdzenie. Na mocy wcześniejszych uwag kończy to rozwiązanie zadania.

7. Udowodnić, że istnieje zbiór A liczb całkowitych dodatnich o następującej własności: dla dowolnego nieskończonego zbioru S liczb pierwszych, istnieją dwie liczby całkowite dodatnie $m \in A$ oraz $n \notin A$, z których każda jest iloczynem dokładnie k różnych liczb pierwszych ze zbioru S dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 2$.

Rozwiązanie:

Skonstruujemy dwa rozłączne zbiory A , B złożone z liczb będących iloczynami różnych liczb pierwszych, takie, że dla dowolnego nieskończonego zbioru liczb pierwszych S istnieją liczby $m \in A$ oraz $n \in B$, które są iloczynami tej samej liczby (nie mniejszej niż 2) elementów zbioru S . Przyjmijmy bowiem, że dla liczby całkowitej $s \geq 1$ oraz dla parami różnych liczb pierwszych $p_1, p_2, \dots, p_s$ iloczyn $p_1 p_2 \dots p_s$ należy do zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy liczba s posiada dokładnie dwa dzielniki pierwsze w zbiorze $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ (mogą one występować w rozkładzie s na czynniki pierwsze w dowolnej potęgde). Podobnie przyjmujemy, że iloczyn $p_1 p_2 \dots p_s$ należy do zbioru B wtedy i tylko wtedy, gdy s posiada dokładnie jeden dzielnik pierwszy w zbiorze $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$. Udowodnimy, że tak zdefiniowane zbiory A i B spełniają żądany warunek.

Niech $S = \{p_1, p_2, \dots\}$ będzie dowolnym nieskończonym zbiorem liczb pierwszych. Niech ponadto $m = p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_{p_1 p_2}$ oraz $n = p_1 p_3 p_4 \dots p_{p_1 p_2 + 1}$. Liczby m i n są iloczynami $s = p_1 p_2 \geq 2$ liczb pierwszych zbioru S . Co więcej, ponieważ s posiada dokładnie dwa dzielniki pierwsze w zbiorze $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{p_1 p_2}\}$ liczba m należy do zbioru A . Podobnie $n \in B$. Dowodzi to poprawności konstrukcji i kończy rozwiązanie zadania.

8. Bob Budowniczy i Buldożer grają w grę na punktach kratowych przestrzeni trójwymiarowej. W swoim ruchu Bob kładzie krzyżyk na polu, które nie należy do żadnej zniszczonej płaszczyzny, zaś ruch Buldożera polega na zniszczeniu dowolnej płaszczyzny prostopadłej do jednej z osi układu współrzędnych, na której Bob nie postawił wcześniej żadnego krzyżyka. Pierwszy ruch wykonuje Bob, a następnie ruchy są wykonywane przez obu graczy naprzemiennie. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których Bob Budowniczy może ułożyć n kolejnych krzyżyków na prostej równoległej do jednej z osi układu współrzędnych, niezależnie od ruchów Buldożera.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby naturalnej n Bob Budowniczy może ułożyć n kolejnych krzyżyków na prostej równoległej do jednej z osi układu współrzędnych. W dalszej części zakładamy, że $n \geq 1$ jest ustaloną liczbą całkowitą.

Przez X, Y, Z oznaczymy trzy kopie zbioru $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, które będą reprezentować odpowiednie współrzędne punktów kratowych w przestrzeni trójwymiarowej. Dla danej liczby całkowitej α , definiujemy płaszczyznę $H_{yz}(\alpha)$

(prostopadłą do osi OX) jako

$$H_{yz}(\alpha) = \{(\alpha, y, z) : y, z \in \mathbb{Z}\}.$$

Analogicznie definiujemy płaszczyzny $H_{zx}(\alpha)$ oraz $H_{xy}(\alpha)$. A zatem, w swoim ruchu Buldożer może zablokować wszystkie punkty należące do jednej z płaszczyzn $H_{yz}(\alpha)$, $H_{zx}(\alpha)$ lub $H_{xy}(\alpha)$ dla wybranego $\alpha \in \mathbb{Z}$.

W trakcie gry będziemy kolorować elementy zbiorów X, Y, Z na czerwono i niebiesko. Gdy Bob Budowniczy stawia krzyżyk w polu (x, y, z) , to malujemy wszystkie współrzędne $x \in X$, $y \in Y$ oraz $z \in Z$ na czerwono. Jeśli zaś Buldożer niszczy płaszczyznę postaci $H_{yz}(x)$, to $x \in X$ kolorujemy na niebiesko i podobnie dla pozostałych dwóch typów płaszczyzn. A zatem, każdy ruch Boba Budowniczego prowadzi do trzech elementów pokolorowanych na czerwono (każdego w innym zbiorze X, Y, Z), zaś jeden ruch Buldożera prowadzi do jednego elementu pokolorowanego na niebiesko (w dokładnie jednym zbiorze X, Y, Z). *Czerwonym przedziałem* nazwiemy dowolny zbiór kolejnych elementów $\{a, a+1, \dots, a+k-1\}$ w jednym ze zbiorów X, Y, Z , które wszystkie są pokolorowane na czerwono (gdzie $k \geq 1$ jest liczbą całkowitą). Powiemy, że jest on *dopuszczalny* jeżeli $k \geq n$ lub żaden z elementów $a+k, a+k+1, \dots, a+n$ nie został pokolorowany jeszcze na niebiesko. Innymi słowy, czerwony przedział jest dopuszczalny, jeżeli jest on długości co najmniej n lub można go w danym momencie gry rozszerzyć (na prawo) do przedziału długości n nie napotykając niebieskich punktów.

Za pomocą indukcji po $k \geq 1$ wykażemy następujące stwierdzenie: dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq k \leq n$ Bob Budowniczy może grać tak aby konstruować dowolnie dużo dopuszczalnych przedziałów długości k w jednym ze zbiorów X, Y, Z .

Zacznijmy od przypadku $k = 1$. Dla ustalonej liczby całkowitej $N \geq 1$ Bob Budowniczy stawia N krzyżyków w polach postaci (n, n, n) , $(2n, 2n, 2n)$, $(3n, 3n, 3n), \dots$. Jeżeli któreś pole tej postaci należy do zniszczonej płaszczyzny, bądź stoi już w tym polu krzyżyk, to Bob Budowniczy stawia krzyżyk w kolejnym niezablokowanym polu tej postaci — jest to możliwe, gdyż w każdym momencie jedynie skończona liczba punktów tej postaci może być zablokowana. Każdy ruch Boba Budowniczego skutkuje pomalowaniem jednego elementu każdego ze zbiorów X, Y, Z na czerwono. Co więcej, ponieważ te elementy są oddalone o co najmniej n , każdy z nich tworzy nowy przedział dopuszczalny długości 1. Ponieważ ruch Buldożera skutkuje malowaniem tylko jednego pola na niebiesko, w każdym ruchu może on uczynić co najwyżej jeden z tych przedziałów niedopuszczalnym. A zatem, po N ruchach, Bob Budowniczy stworzy $3N$ czerwonych przedziałów, z których Buldożer jedynie N może uczynić niedopuszczalnymi. W efekcie, pozostanie co najmniej $2N$ dopuszczalnych przedziałów i jasne jest, że przynajmniej $\frac{2}{3}N$ z nich musi należeć do tego samego zbioru X, Y, Z . To dowodzi prawdziwości naszego stwierdzenia dla $k = 1$.

Założmy teraz, że Bob Budowniczy chce skonstruować M dopuszczalnych przedziałów długości $k+1$, gdzie $k \leq n-1$, a skonstruował już $N \geq 2(k+1)M$ dopuszczalnych przedziałów długości k . Ustalmy element $x \in X$, będący końcem jednego ze skonstruowanych dopuszczalnych przedziałów długości k w zbiorze X . Ponieważ przedział jest dopuszczalny, to element $x+1 \in X$ nie jest pokolorowany na niebiesko. Wynika stąd, że wśród punktów postaci $(x+1, y, z)$ (gdzie $y, z \in \mathbb{Z}$) jedynie skończona liczba leży na płaszczyznach zniszczonych przez Buldożera, gdyż płaszczyzna $H_{yz}(x+1)$ nie została zniszczona. W szczególności, istnieje taka liczba całkowita t , że dla $y, z \geq t$ żaden punkt postaci $(x+1, y, z)$ nie jest zablokowany. Możemy wybrać tak duże t , aby to samo było prawdą dla wszystkich $x_1, \dots, x_N \in X$ będących końcem dowolnego z rozważanych N dopuszczalnych przedziałów. W ciągu $k+1$ kolejnych ruchów Bob Budowniczy stawia krzyżyki na punktach postaci (x_1+1, y, z) , $(x_2+1, y+1, z)$, $\dots$, $(x_{k+1}+1, y+k, z)$. Jeżeli w pewnym punkcie stoi już krzyżyk, to Bob Budowniczy stawia krzyżyk na dowolnym innym polu. Jeżeli nie jest możliwe postawienie tam krzyżyka, gdyż Buldożer zniszczył płaszczyznę postaci $H_{xz}(y+i)$ dla $1 \leq i \leq k$, to Bob Budowniczy stawia krzyżyk na dowolnym innym polu postaci $(x_{i-1}+1, y_0, z)$ tak aby rozszerzyć dopuszczalny przedział o końcu x_{i-1} . Zauważmy, że po wykonaniu takich $k+1$ ruchach Boba Budowniczego i dowolnych $k+1$ ruchach Buldożera powstanie przynajmniej jeden dopuszczalny przedział o długości $k+1$ w pewnym ze zbiorów X, Y . Istotnie, Buldożer może w jednym ruchu uczynić zablokować co najwyżej jeden dopuszczalny przedział w zbiorze X lub zablokować tworzący się jednocześnie dopuszczalny przedział w zbiorze Y długości $k+1$. Ponieważ łącznie mówimy o $k+2$ dopuszczalnych przedziałach ($k+1$ w zbiorze X i jednym w zbiorze Y), to na końcu zostanie przynajmniej jeden dopuszczalny przedział. Powtarzając tę procedurę $2M$ razy (za każdym razem rozszerzając nowy dopuszczalny przedział w zbiorze X), otrzymamy łącznie co najmniej $2M$ dopuszczalnych przedziałów długości $k+1$ w zbiorach X, Y . A zatem pewne M z tych przedziałów znajduje się w X lub pewne M znajduje się w Y . Kończy to dowód indukcyjny stwierdzenia.

Wykazaliśmy w ten sposób, że Bob Budowniczy może grać tak aby utworzyć czerwony przedział długości n w jednym ze zbiorów X, Y, Z . Bez straty ogólności przyjmijmy, że $\{x_0, x_0+1, \dots, x_0+n-1\}$ jest czerwonym przedziałem w X . W szczególności, żadna z płaszczyzn postaci $H_{yz}(x_0+i)$ dla $0 \leq i \leq n-1$ nie została zniszczona przez Buldożera. Ponieważ $x_0 \in X$ jest czerwony, to istnieje punkt postaci (x_0, y_0, z_0) , na którym Bob Budowniczy postawił krzyżyk. W tej sytuacji nie mogły też zostać zniszczone płaszczyzny $H_{xz}(y_0)$ oraz $H_{xy}(z_0)$. Bob Budowniczy może więc postawić krzyżyki na polach $(x_0+1, y_0, z_0), \dots, (x_0+n-1, y_0, z_0)$ uzyskując n krzyżyków leżących na prostej równoległej do osi OX . Kończy to rozwiązanie zadania.

9. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o . Punkt P leży na prostej BC ,

ostatecznie

$$MJ^2 = MK \cdot MY = MB^2,$$

więc $MJ = MB$. To pozwala napisać

$$\angle AJB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BMJ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB,$$

co wraz z równością $\angle BAJ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ daje $\angle ABJ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$. W takim razie prosta BJ jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku B w trójkącie ABC . Ostatecznie punkt J leży na przecięciu dwusiecznych kątów zewnętrznych przy wierzchołkach A i B w trójkącie ABC , a więc jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC stycznego do boku AB , co kończy rozwiązanie.

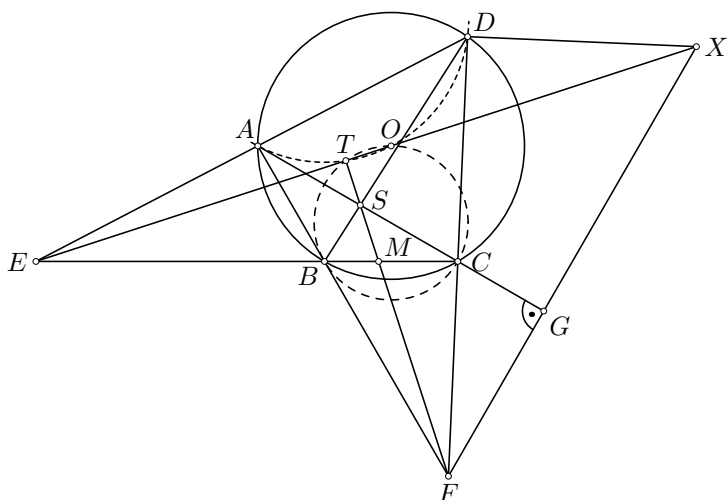
10. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O . Punkty E i F są odpowiednio punktami przecięcia półprostych $DA \rightarrow$ z $CB \rightarrow$ i $AB \rightarrow$ z $DC \rightarrow$. Prosta prostopadła do AC i przechodząca przez F przecina prostą EO w punkcie X . Udowodnić, że $\angle CDX = 90^\circ$.

Rozwiązanie:

Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD , a G punktem przecięcia prostych AC i FX . Niech ponadto prosta FS przecina proste BC i EO odpowiednio w punktach M i T . Ponieważ prosta FS jest biegunową punktu E względem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, to jest prostopadła do prostej EO oraz $(B, C; M, E) = 1$. W takim razie prosta EO jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku T w trójkącie BCT . Skoro $BO = CO$, to wnosimy stąd, że punkty B, C, T, O leżą na jednym okręgu. Zatem $EO \cdot ET = EC \cdot EB = EA \cdot ED$, więc punkty A, D, O, T leżą na jednym okręgu. W takim razie

$$\begin{aligned} \angle DTX &= \angle DAO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DOA = 90^\circ - \angle DCA = \\ &= 90^\circ - \angle FCG = \angle CFG = \angle DFX, \end{aligned}$$

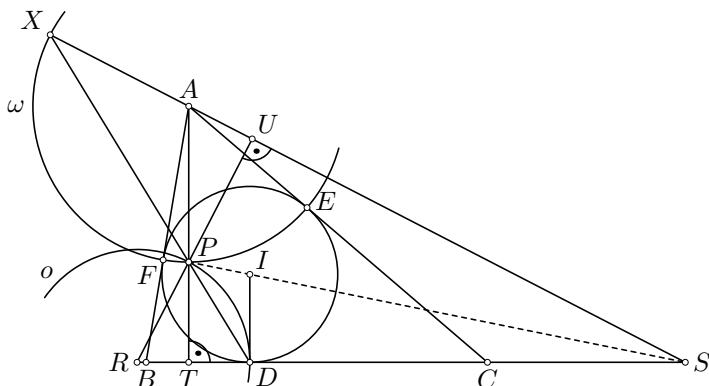
czyli punkty D, T, F, X leżą na jednym okręgu. Ponieważ $\angle FTX = 90^\circ$, więc $\angle CDX = 90^\circ$.



11. Okrąg o środku I jest wpisany w trójkąt ABC i styczny do jego boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Okrąg ω o środku w punkcie A i promieniu AF przecina wysokość trójkąta ABC , poprowadzoną z wierzchołka A , w punkcie P . Prosta DP przecina okrąg ω w punkcie X , zaś prosta XA przecina prostą BC w punkcie S . Dowieść, że punkty P , I , S są współliniowe.

Rozwiązanie:

Niech AT będzie wysokością danego trójkąta, zaś o okręgiem stycznym do prostej ID w punkcie D i przechodzącym przez punkt P . Jego środek R leży na prostej BC . Przyjmijmy, że prosta RP przecina prostą AS w punkcie U . Oś potęgowa okręgów o i ω zawiera punkty P oraz I , gdyż odcinki ID i IF są równe i styczne do obu okręgów. Wystarczy udowodnić, że na tej osi leży także punkt S .



Skoro $RD = RP$, to

$$\angle PXA = \angle APX = \angle DPT = 90^\circ - \angle RDP = 90^\circ - \angle RPD = 90^\circ - \angle XPU.$$

W takim razie prosta RP jest prostopadła do prostej AS . Stąd i z prostopadłości AP i BC dostajemy, że punkt P jest ortocentrum trójkąta ARS . Zatem prosta SP jest prostopadła do prostej AR , a więc punkt S leży na osi potęgowej okręgów o i ω , co kończy dowód.

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

1. Wykazać, że liczby rzeczywiste dodatnie a , b , c spełniają równanie

$$a^4 + b^4 + c^4 + 4a^2b^2c^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje trójkąt ABC o kątach wewnętrznych α , β , γ taki, że

$$\sin \alpha = a, \quad \sin \beta = b \quad \text{oraz} \quad \sin \gamma = c.$$

Rozwiązanie:

Traktując liczby $a, b > 0$ jako parametry, rozważmy trójmian kwadratowy f zadany wzorem

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 + 2t(2a^2b^2 - a^2 - b^2) + (a^4 + b^4 - 2a^2b^2) = \\ &= t^2 + 2t(a^2(b^2 - 1) + b^2(a^2 - 1)) + (a^2 - b^2)^2 \end{aligned}$$

dla $t \in \mathbb{R}$. Jasne jest, że liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek dany w zadaniu wtedy i tylko wtedy, gdy liczba c^2 jest pierwiastkiem trójmianu f . Wyróżnik Δ tego trójmianu jest równy

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(2a^2b^2 - a^2 - b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)^2 = 4(2a^2b^2 - 2a^2)(2a^2b^2 - 2b^2) = \\ &= 16a^2b^2(1 - a^2)(1 - b^2). \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że jeżeli liczby a, b, c spełniają dany warunek, to skoro liczba c^2 jest pierwiastkiem trójmianu f , musimy mieć $\Delta \geq 0$. To oznacza, że $a, b \leq 1$ lub $a, b \geq 1$. Wykażemy, że musi zachodzić pierwsza możliwość. Istotnie, w przeciwnym wypadku, współczynnik przy t w trójmianie f jest nieujemny. Ponieważ ze wzorów Viete'a wynika, że jest on przeciwnością sumy pierwiastków, to suma pierwiastków f jest liczbą niedodatnią. Jednocześnie, skoro wyraz wolny f jest nieujemny, to oba te pierwiastki muszą być liczbami niedodatnimi. To jest jednak sprzeczne z faktem, że dodatnia liczba c^2 jest pierwiastkiem f . A zatem mamy $a, b \leq 1$. Co więcej, liczby a i b nie mogą być jednocześnie równe 1, gdyż wówczas 0 jest jedynym pierwiastkiem f .

Ponieważ dowolna liczba z przedziału $(0, 1]$ jest wartością funkcji sinus na przedziale $(0, \frac{\pi}{2}]$ możemy zapisać $a = \sin \alpha$ oraz $b = \sin \beta$, gdzie $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ (przy czym przynajmniej jedna z liczb α, β jest różna od $\frac{\pi}{2}$). Wówczas z jedynki trygonometrycznej wynika, że

$$\Delta = 16a^2b^2(1 - a^2)(1 - b^2) = 16 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \alpha \cos^2 \beta,$$

a stąd

$$\sqrt{\Delta} = 4 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta,$$

gdyż funkcja $\cos$ jest nieujemna na przedziale $(0, \frac{\pi}{2}]$. Co więcej

$$a^2(b^2 - 1) + b^2(a^2 - 1) = -(\sin^2 \alpha \cos^2 b + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha).$$

Ze wzoru na pierwiastki funkcji kwadratowej otrzymujemy teraz, że c^2 jest jedną z liczb

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha \pm 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta = \\ = (\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha)^2 = \sin(\alpha \pm \beta)^2. \end{aligned}$$

Jeżeli $c^2 = \sin(\alpha + \beta)^2$, to

$$c = \sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin \gamma,$$

gdzie $\gamma = \pi - \alpha - \beta \in (0, \pi)$. A zatem w rozważanym przypadku kąty α, β, γ są kątami pewnego trójkąta.

Założmy teraz, że $c^2 = \sin(\alpha - \beta)^2$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\alpha > \beta$. Wówczas $c = \sin(\alpha - \beta)$. Co więcej, $a = \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$. A zatem, skoro

$$(\pi - \alpha) + \beta + (\alpha - \beta) = 180^\circ,$$

to liczby a, b, c są i w tym przypadku równe sinusom kątów pewnego trójkąta.

Założmy teraz, że $a = \sin \alpha$, $b = \sin \beta$, $c = \sin \gamma$ dla kątów α, β, γ pewnego trójkąta. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, gdyż w trójkącie istnieje co najwyżej jeden kąt, który nie jest ostry. W tej sytuacji mamy

$$c^2 = \sin^2 \gamma = \sin^2(\pi - \alpha - \beta) = \sin^2(\alpha + \beta).$$

Łącząc to z wyprowadzonymi wcześniej wzorami na pierwiastki trójmianu f , wnioskujemy, że w rozważanej sytuacji mamy $f(c^2) = 0$. Oznacza to, że liczby a, b, c spełniają żadaną równość i rozwiązanie zadania jest zakończone.

2. Dla danych liczb całkowitych dodatnich a, b i x_1 definiujemy ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ zadany poprzez zależność $x_n = ax_{n-1} + b$ dla $n \geq 2$. Znaleźć warunek konieczny i wystarczający jaki muszą spełniać liczby a, b, x_1 , aby dla dowolnych indeksów m i n zachodziła implikacja $m \mid n \Rightarrow x_m \mid x_n$.

Rozwiązanie:

Założmy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ spełnia dany warunek rekurencyjny oraz $x_1 = 1$. Wówczas zachodzą równości $x_2 = a + b$, $x_3 = a(a + b) + b = a^2 + ab + b$, $x_4 = a(a^2 + ab + b) + b = a^3 + a^2b + ab + b$ i ogólnie

$$x_n = a^{n-1} + b(a^{n-2} + \dots + 1) \quad \text{dla } n \geq 1,$$

co można łatwo wykazać za pomocą indukcji. Rozpatrzmy najpierw przypadek $a = 1$. Wówczas z powyższego wzoru wynika, że

$$x_n = (n - 1)b + 1 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Jeżeli ciąg ma spełniać daną implikację, to dla dowolnego $n \geq 1$ powinna zachodzić podzielność $x_n \mid x_{n^2}$, czyli $(n - 1)b + 1 \mid (n^2 - 1)b + 1$. Jednocześnie $(n - 1)b + 1 \mid (n - 1)(n + 1)b + (n + 1) = (n^2 - 1)b + (n + 1)$. Stąd $(n - 1)b + 1 \mid n$ dla dowolnego $n \geq 1$. Jasne jest jednak, że jeżeli $b \neq 1$, to dla odpowiednio dużych n mamy $(n - 1)b + 1 > n$, a więc rozważana podzielność jest niemożliwa. Stąd wynika, że musimy mieć $b = 1$. W tym przypadku $x_n = n$ dla dowolnego $n \geq 1$ i oczywiście żądana implikacja jest spełniona.

Założmy więc, że $a > 1$. Wówczas

$$x_n = a^{n-1} + b \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Podzielność $x_m \mid x_n$ równoważna jest zatem podzielności

$$a^{m-1} + b \frac{a^{m-1} - 1}{a - 1} \mid a^{n-1} + b \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}$$

lub też

$$a^m - a^{m-1} + b(a^{m-1} - 1) \mid a^n - a^{n-1} + b(a^{n-1} - 1).$$

Zakładając, że $n \geq m$ możemy przemnożyć lewą stronę przez a^{n-m} i odjąć ją od prawej, aby otrzymać równoważną podzielność

$$a^m - a^{m-1} + b(a^{m-1} - 1) \mid b(a^{n-m} - 1).$$

Zauważmy teraz, że jeżeli powyższa podzielność zachodzi dla $n = 2m$, to zachodzi dla wszystkich n podzielnych przez m . Istotnie, dla $n = 2m$ podzielność przyjmuje postać

$$a^m - a^{m-1} + b(a^{m-1} - 1) \mid b(a^m - 1),$$

a jeśli $n = km$, to ze wzoru na różnicę k -tych potęg wynika, że $a^m - 1 \mid a^n - 1$. A zatem, fakt, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia żadaną implikację, jest równoważny temu, że dla dowolnego $m \geq 1$ spełniona jest ostatnia podzielność. Zauważmy jednak, że skoro $a^m - 1 \leq a^m - a^{m-1} + b(a^{m-1} - 1)$, to

$$\frac{b(a^m - 1)}{a^m - a^{m-1} + b(a^{m-1} - 1)} \leq b.$$

Ponieważ powyższy iloraz ma być liczbą całkowitą dla dowolnego $m \geq 1$, więc istnieje pewna wartość $k \in \{1, 2, \dots, b\}$, którą przyjmuje on dla nieskończenie wielu m . Wówczas możemy zapisać

$$b(a^m - 1) = k(a^m - a^{m-1} + b(a^{m-1} - 1)),$$

co po przekształceniu daje nam

$$a^{m-1}(ak - ab + kb - k) = b(k - 1).$$

Zauważmy jednak, że prawa strona powyższej równości jest stała, zaś czynnik a^{m-1} może przyjmować dowolnie duże wartości. W tej sytuacji drugi czynnik lewej strony musi być równy 0, gdyż inaczej wartość bezwzględna lewej strony przyjmowałaby dowolnie duże wartości. Stąd $ak + kb = ab + k$ i w konsekwencji również $b(k-1) = 0$, czyli $k = 1$. To daje nam $a+b = ab+1$, lub też równoważnie $(a-1)(b-1) = 0$. Ponieważ założyliśmy, że $a \neq 1$, to musimy mieć $b = 1$. W tym przypadku zachodzi równość $a^m - a^{m-1} + b(a^{m-1} - 1) = a^m - 1$, a więc podzielność

$$a^m - a^{m-1} + b(a^{m-1} - 1) \mid b(a^m - 1)$$

istotnie jest spełniona dla dowolnego $m \geq 1$ i w konsekwencji ciąg spełnia żądany warunek. Łącząc oba rozważone przypadki, wykazaliśmy, że przy założeniu $x_1 = 1$ ciąg spełnia żadaną implikację wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 1$.

Pozostaje zauważyć, że w ogólnym przypadku skoro $x_1 \mid x_2 = ax_1 + b$, to $b = b'x_1$ dla pewnej liczby całkowitej $b' \geq 1$. Rozważając teraz ciąg $(x'_n)_{n=1}^\infty$ zadany jako $x'_1 = 1$, $x'_n = ax'_{n-1} + b'$ dostajemy $x_n = x_1 x'_n$ dla dowolnego $n \geq 1$. Stąd wynika, że ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ spełnia żadaną implikację wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona spełniona przez ciąg $(x'_n)_{n=1}^\infty$. Ponieważ $x'_1 = 1$, to sprowadza to sytuację do rozważanego wcześniej przypadku, gdzie wykazaliśmy, że musimy mieć $b' = 1$. Oznacza to, że ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ spełnia żadaną implikację wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = b$, gdzie $b \geq 1$ jest dowolną liczbą całkowitą. Kończy to rozwiązanie zadania.

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\angle ABC = \angle ADC = 135^\circ.$$

Punkty M , N leżą odpowiednio na półprostych $AB^\rightarrow$, $AD^\rightarrow$ i spełniają warunki $\angle MCD = \angle NCB = 90^\circ$. Okręgi opisane na trójkątach AMN i ABD przecinają się po raz drugi w punkcie $K \neq A$. Udowodnić, że proste AK i KC są prostopadłe.

Rozwiązanie:

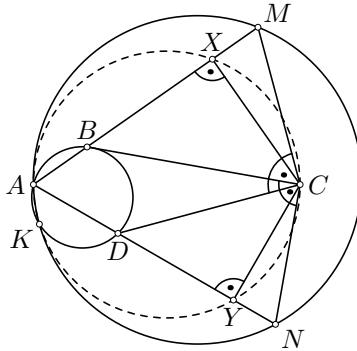
Niech X i Y będą takimi punktami odpowiednio na prostych AM i AN , że $\angle AXC = \angle AYC = 90^\circ$. Wtedy $\angle MBC = \angle XBC = \angle NDC = \angle YDC = 45^\circ$ oraz $\angle BCM = 90^\circ - \angle BCD = \angle DCN$. W takim razie trójkąty BXC i DYC są podobne oraz trójkąty BMC i DNC są podobne. To pozwala napisać

$$\frac{BX}{DY} = \frac{BC}{DC} = \frac{BM}{DN}.$$

Skoro $\angle KBA = \angle KDA$ oraz $\angle KMA = \angle KNA$, to trójkąty KBM i KDN są podobne. W takim razie punkt K jest środkiem podobieństwa spiralnego o środku K przeprowadzającego odcinek BM na odcinek DN . Ponieważ $\frac{BX}{DY} = \frac{BM}{DN}$, więc w przekształceniu tym punkt X przechodzi na punkt Y . Stąd wniosek, że

$$\angle KXA = \angle KXB = \angle KYD = \angle KYA,$$

więc punkty K, A, X, Y leżą na jednym okręgu. Skoro $\angle AXC = \angle AYC = 90^\circ$, to punkt C także leży na tym okręgu, zaś odcinek AC jest jego średnicą. To oznacza, że $\angle AKC = 90^\circ$, co kończy dowód.



4. Punkt P jest środkiem boku AC trójkąta ABC . Okrąg k przecina wnętrza odcinków AP, CP, BC i AB odpowiednio w punktach K, L, M i N . Dowieść, że jeżeli S jest środkiem odcinka KL i spełnione są równości

$$2 \cdot AN \cdot AB \cdot CL = 2 \cdot CM \cdot BC \cdot AK = AC \cdot AK \cdot CL,$$

to punkt przecięcia prostych KN i ML leży na symetralnej odcinka PS .

Rozwiązanie:

Niech X będzie punktem przecięcia prostych KN i ML . Z danych w treści zadania zależności wynika, że

$$\frac{AK}{AN} = \frac{AB}{AP} \quad \text{oraz} \quad \frac{CL}{CM} = \frac{BC}{CP},$$

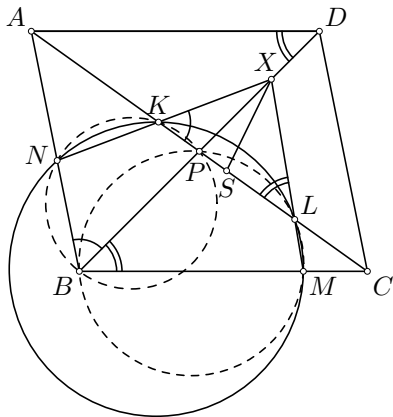
co pociąga za sobą podobieństwo trójkątów AKN i ABP oraz trójkątów CLM i CBP . W takim razie

$$\angle LKX = \angle AKN = \angle ABP \quad \text{i} \quad \angle KXL = \angle CLM = \angle CBP.$$

Stąd otrzymujemy, że $\angle KXL = 180^\circ - \angle NBM$, więc punkty X, M, B, N leżą na jednym okręgu. Stąd i z tego, że punkty K, L, M, N leżą na okręgu dostajemy

$$\angle NBP = \angle LKX = 180^\circ - \angle NKL = \angle NML = \angle NBX,$$

więc punkt X leży na prostej BP .



Niech D będzie obrazem symetrycznym punktu B względem punktu P . Czworokąt $ABCD$ jest więc równoległobokiem. Wówczas

$$\angle LKX = \angle ABP = \angle ABD \quad \text{oraz} \quad \angle KLB = \angle CBL = \angle ADB,$$

skąd wniosek, że trójkąty KLX i BDA są podobne. Odcinki XS i AP to odpowiednie środkowe w tych trójkątach, więc $\angle APX = \angle APD = \angle LSX$. Zatem trójkąt PSX jest równoramienny, skąd wynika teza zadania.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o następującej własności: dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych k , m , dla których $k + m \leq n$ liczby $\binom{n-k}{m}$ i $\binom{n-m}{k}$ są jednakowej parzystości.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy następujące **twierdzenie Lucasa**: jeżeli $m, n \geq 0$ są liczbami całkowitymi, to dla dowolnej liczby pierwszej p zachodzi kongruencja

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{n_k}{m_k} \cdot \binom{n_{k-1}}{m_{k-1}} \cdot \dots \cdot \binom{n_0}{m_0} \pmod{p},$$

gdzie $n_i, m_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ są cyframi liczb n i m w zapisie o podstawie p , czyli $n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \dots + n_0$ oraz $m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \dots + m_0$ (jeżeli zapis jednej z liczb n, m ma więcej cyfr, to dopisujemy zera od lewej strony w liczbie z krótszym zapisem). Co więcej, w powyższej kongruencji przyjmujemy, że $\binom{x}{y} = 0$ dla liczb całkowitych $y > x \geq 0$.

Powyższe twierdzenie zastosujemy dla $p = 2$. Zauważmy najpierw, że jeżeli liczba całkowita dodatnia n spełnia warunek dany w treści zadania, to biorąc $k = 0$ otrzymujemy, że liczba $\binom{n}{m}$ jest tej samej parzystości co liczba $\binom{n-m}{0} = 1$ dla dowolnego $0 \leq m \leq n$, czyli jest nieparzysta. Biorąc pod uwagę twierdzenie

Lucasa, oznacza to, że dla dowolnego $0 \leq m \leq n$ dowolny dwumian występujący w iloczynie po prawej stronie kongruencji musi być równy 1. W rozważanej sytuacji $p = 2$ mamy łącznie jedynie cztery możliwości: $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 1$, $\binom{0}{0} = 1$ oraz $\binom{0}{1} = 0$. A zatem, dla żadnego $0 \leq m \leq n$ nie występuje sytuacja, w której n ma 0 w zapisie dwójkowym na pewnej pozycji, zaś m ma 1 na tej samej pozycji. Ponieważ m jest dowolną liczbą w zbiorze $\{0, 1, \dots, n\}$ to jasne jest jednak, że to oznacza, iż n ma same cyfry 1 w systemie dwójkowym. Stąd wynika, że $n = 2^N - 1$ dla pewnej liczby całkowitej $N \geq 1$.

Udowodnimy teraz, że wszystkie liczby postaci $n = 2^N - 1$ spełniają dany warunek. Rozumując jak powyżej, możemy stwierdzić ogólnie, że jeżeli zachodzi $k + m \leq n$, to liczba $\binom{n-k}{m}$ będzie parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje chociaż jedna pozycja w zapisie dwójkowym, na którym $n - k$ ma cyfrę 0, zaś m ma cyfrę 1. Ponieważ jednak n ma same cyfry 1 w zapisie dwójkowym, to jest to równoważne temu, że na tej pozycji k ma cyfrę 1. W takiej sytuacji, na tej samej pozycji liczba $n - m$ ma cyfrę 0, zaś k ma cyfrę 1, a więc również liczba $\binom{n-m}{k}$ jest parzysta. Wnioskujemy więc, że dla liczby n posiadającej wyłącznie cyfry 1 w systemie dwójkowym liczba $\binom{n-k}{m}$ jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\binom{n-m}{k}$ jest parzysta. Stąd wynika, że wszystkie liczby postaci $n = 2^N - 1$ spełniają żądany warunek.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 6$ oraz rodzina $\mathcal{F}$ złożona z 3-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, która spełnia następujący warunek: dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leq i < j \leq n$ istnieje co najmniej $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ podzbiorów $A \in \mathcal{F}$ takich, że $i, j \in A$. Udowodnić, że istnieje liczba całkowita $m \geq 1$ oraz parami rozłączne zbiory $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{F}$, dla których

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| \geq n - 5.$$

Rozwiązanie:

Wybermy maksymalną liczbę m , dla której istnieją parami rozłączne zbiory $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{F}$. Dla dowodu nie wprost założmy, że $n - 3m = k \geq 6$. Oznaczmy przez X zbiór k liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które nie pojawiają się w żadnym zbiorze A_i . Z elementów zbioru X wybierzmy 6 i utwórzmy z nich 3 rozłączne pary X_1, X_2, X_3 (zapominając o pozostałych elementach X). Zauważmy, że jeżeli $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ jest takim elementem, że $X_i \cup \{a\} \in \mathcal{F}$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3\}$, to $a \in A_i$ dla pewnego $1 \leq i \leq m$. W przeciwnym bowiem razie, do zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_m$ można by było dołączyć rozłączny z nimi zbiór $X_i \cup \{a\} \in \mathcal{F}$, otrzymując w ten sposób większy układ parami rozłącznych zbiorów. Niech $x_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3\}$, gdzie $1 \leq i \leq 3$ oraz $1 \leq j \leq m$ oznacza liczbę elementów zbioru A_j , które po dołączeniu do i -tej z rozważanych par utworzą zbiór z $\mathcal{F}$. Na mocy warunku danego w zadaniu oraz wcześniejszej

obserwacji mamy więc

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1$$

dla dowolnego $1 \leq i \leq 3$. Za pomocą tej nierówności i zmiany kolejności sumowania oszacujemy średnią arytmetyczną z wyrażeń postaci $\sum_{i=1}^3 x_{i,j}$. Mamy bowiem

$$\frac{1}{m} \cdot \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^3 x_{i,j} \right) = \frac{1}{m} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^m x_{i,j} \right) \geq 3 \frac{(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1)}{m} > \frac{3(\frac{n}{3} - 2)}{\frac{n-6}{3}} = 3.$$

Skoro średnia arytmetyczna jest większa niż 3, to dla pewnego $1 \leq j \leq m$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^3 x_{i,j} > 3.$$

Oznacza to, że dla pewnego $1 \leq j \leq m$ co najmniej 4 razy zdarza się, iż któraś z par X_i tworzy podzbiór należący do rodziny $\mathcal{F}$ po dołączeniu do niej pewnego elementu zbioru A_j .

Utwórzmy graf dwudzielny, którego jeden zbiór podziału stanowią trzy elementy zbioru A_j , a drugi zbiór pary X_1, X_2, X_3 . Parę X_i łączymy krawędzią z elementem $a \in A_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X_i \cup \{a\} \in \mathcal{F}$. W naszym grafie istnieją w tej sytuacji co najmniej 4 krawędzie. W grafie dwudzielnym o 3 wierzchołkach w obu grupach podziału i 4 krawędziach zawsze można wybrać 2 krawędzie rozłączne — z jednego wierzchołka wychodzą bowiem co najwyżej 3 krawędzie. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a \neq b \in A_j$ są takie, że $X_1 \cup \{a\} \in \mathcal{F}$ oraz $X_2 \cup \{b\} \in \mathcal{F}$. Pozostaje zauważyć, że zastępując zbiór A_j przez zbiory $X_1 \cup \{a\}, X_2 \cup \{b\}$ otrzymujemy układ $m+1$ parami rozłącznych zbiorów z $\mathcal{F}$. Przeczy to początkowemu założeniu o maksymalności m i dowód jest zakończony.

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.
Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...
5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7 i 8**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N -tej zmianie w czasie Meczu.
10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**.
13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo –10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
18. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści

Treści zadań	5
Zawody indywidualne	5
Pierwszy Mecz Matematyczny	10
Drugi Mecz Matematyczny	12
Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne	14
Rozwiązania	15
Zawody indywidualne	15
Pierwszy Mecz Matematyczny	46
Drugi Mecz Matematyczny	62
Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne	77
Regulamin Meczu Matematycznego	85